ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXX 1960 3

МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев и Э. М. Нерсисян

Проникание произвольного давления в сжимаемую жидкость

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 19. II 1960)

Пусть в точке O сжимаемой жидкости возникло некоторое давление, которое распространяется по произвольному симметричному относительно точки O закону. Уравнение состояния жидкости—политропа

$$P = B(S)\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right], \tag{1}$$

где P — давление, $B(S)$ — маломеняющаяся функция, ρ — плотность, S — энтропия. Для давлений порядка 1000 $кг/см^2$ движение жидкости можно предполагать изэнтропическим. Движение жидкости обладает осевой симметрией.

Выберем ось Ox по поверхности жидкости, ось Oy направим вглубь жидкости. На поверхности $y=0$ имеем граничное условие;

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} P_1(x, t) & x < R(t) \\ 0 & x > R(t) \end{cases} \tag{2}$$

где t — время с начала движения, $x = R(t)$ — радиус фронта давления на поверхности.

Как показано в [1], для P порядка $1000 \frac{кг}{см^2}$ величина $\frac{P}{Bn}$ будет мала и элементарные волны, возникшие в точках $x = x'$ поверхности в момент $t = t'$, можно считать волнами Римана

$$(x - x' - u)^2 + (y - v)^2 = a_1^2(x', t')(t - t')^2, \tag{3}$$

где u, v — компоненты скорости частиц на поверхности по осям Ox и Oy; $a_1(x', t',)$ — скорость звука в точке $x = x'$ в момент $t = t'$, причем [1]

$$a_1(x', t') = a_0\left[1 + \frac{n-1}{Bn} P_1(x', t')\right], \tag{4}$$

a_0 — скорость звука покоящейся жидкости.

В выражении (3) пренебрежем u, v для упрощения выкладок и напишем уравнения поверхностей постоянных давлений и скоростей звука (поверхности уровня). Уравнения поверхностей уровня найдутся как огибающие (3) при $a_1(x', t') = \text{const}$. Окончательно имеем:

$$(x - x')^2 + y^2 = a_1^2(x', t')(t - t')^2$$

$$(x - x')\frac{\partial x'}{\partial t'} = a_1^2(x', t')(t' - t), \tag{5}$$

где $\frac{\partial x'}{\partial t'}$ при постоянной $a_1(x', t')$ имеет вид

$$\frac{\partial x'}{\partial t'} = \frac{-\frac{\partial a_1(x', t')}{\partial t'}}{\frac{\partial a_1(x', t')}{\partial x'}}.$$

Уравнения (5) служат для определения x' и t' в функции x, y, t и для определения давления $P(x, y, t) = P_1(x', t')$ в точках за ударной волной, которая в нашем приближении не влияет на течение за ней. Для определения ударной волны используем приближенную формулу для скорости ударной волны ([2])

$$D = \frac{1}{2}\left[a_0 + a_1(x', t') + \frac{2}{n-1}a_1(x', t') - \frac{2a_0}{n-1}\right] = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}.$$

Последнее уравнение, после подстановки в него x' и t' в функции x, y, t из (5), при граничном условии

$$y|_{x=R(t)} = 0,$$

служит для определения $y = f(x, t)$ — уравнения ударной волны. После определения последовательных значений y при данном t и x из (5) можно определить x' и t', а затем из $p = p_1(x', t')$ определить давление в точках ударной волны.

Однако проще подставить y через t' из (5) в уравнение для скорости ударной волны и получить дифференциальное уравнение для $t'(x, t)$. Для ряда значений времен t и координат x для воды произведены вычисления, результаты которых приведены в табл. 1 и 2.

Для воды имеем: $n = 7$, $B = 3045\ \frac{кг}{см^2}$, $a_0 = 1540\ \frac{м}{сек}$. Для граничного давления берем некоторую аппроксимацию истинных давлений при взрыве в атмосфере (резко падающее граничное давление)

$$P_1(x', t') = 1{,}2048\left[\left(\frac{R'(t')}{340}\right)^2 - 1\right] \cdot f\left(\frac{x'}{R(t')}\right),$$

где

$$R(t') = 12411{,}475t' + 196{,}566 -$$

$$-\sqrt{(12411{,}475t' + 196{,}565)^2 - 8324203t'^2 - 3931321t'}$$

$$f\left(\frac{x'}{R(t')}\right)=8,729-7,481\ \frac{x'}{R(t')}-$$

$$-7,284\sqrt{\left[1,153-\frac{x'}{R(t')}\right]^2-0,022241}.$$

При данных значениях параметров ударная волна будет пологой и в формуле для скорости ударной волны можно пренебрегать $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ по сравнению с единицей.

Таблица 1
$t=0{,}0155;\ R'(t)=$
$=3217{,}7$ *м/сек*

x	y	P_1
91,72	0	106,71
76,98	6,27	168,91
65,21	9,35	199,70
54,50	13,53	228,56

Таблица 2
$t=0{,}001$ *сек*; $R'(t)=$
$=9302{,}4$ *м/сек*

x	y	P_1
9,65	0	900,69
8,72	0,1770	910,15
7.78	0.3348	927,45
6,84	0,5226	959,61

В случае автомодельного граничного условия (2)

$$P_1(x',t')=P_a\cdot f\ \left(\frac{x'}{t'}\right)$$

для определения ударной волны получается обыкновенное дифференциальное уравнение и в некоторых частных случаях найдены простые фурмулы ([2]).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ ԵՎ Է. Մ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ

Կամայական ճնշման թափանցումը սեղմելի հեղուկի մեջ

Թող սեղմելի հեղուկի ինչ-որ O կետում առաջացել է ինչ-որ ճնշում, որը տարածվում է O կետի նկատմամբ կամայական սիմետրիկ օրենքով: Պոլիտրոպ հեղուկի վիճակի հավասարումն է

$$P=B(S)\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n-1\right],$$

որտեղ P—ճնշումն է, B(S)—քիչ փոփոխվող ֆունկցիան, ρ—խտությունը, S—էնտրոպիան 100 կգ/սմ² կարգի ճնշումների համար հեղուկի շարժումը կարելի է ենթադրել իզենտրոպիկ: Հեղուկի շարժումն օժտված է առանցքային սիմետրիայով:

Ընտրենք Ox առանցքը հեղուկի մակերևույթով, Oy ուղղենք հեղուկի ներսը: y = O մակերևույթում ունենք հետևյալ եզրային պայմանը՝

$$P(x,0,t)=\begin{cases}P_1(x,t) & x<R(t)\\ 0 & x>R(t)\end{cases},$$

որտեղ t—ժամանակն է սկսած շարժման սկզբից, $x=R(t)$—ճնշման ճակատի շառավիղն է մակերևույթի վրա:

Ինչպես ցույց է տրված (1), 100 կգ/սմ^2 կարգի P համար $\frac{P}{Bn}$ մեծությունը փոքր է և էլեմենտար ալիքները, որոնք առաջանում են մակերևույթի $x=x'$ կետերում $t=t'$ մոմենտին, կարելի է հաշվել Ռիմանի ալիքներ՝

$$(x-x'-u)^2+(y-v)^2=a_1^2(x',t')(t-t')^2, \tag{1*}$$

որտեղ u, v — մակերևույթի մասնիկի արագության բաղադրիչներն են $0x$ և $0y$ առանցքների ուղղությամբ. $a_1(x',t')$ — $x=x'$ կետում $t=t'$ մոմենտում ձայնի արագությունն է, ըստ որում (1)

$$a_1(x',t')=a_0\left[1+\frac{n-1}{Bn}P_1(x',t')\right]$$

a_0 — ձայնի արագությունն է հանգիստ հեղուկում:

Մակերևույթի մակարդակի հավասարումները գտնվում են, որպես (1*) պարուրիչ $a_1(x',i')=\mathrm{cosnt}$ դեպքում:

Հարվածող ալիքի որոշման համար օգտագործվում է հարվածող ալիքի արագության մոտավոր բանաձևը [2]:

$$D=\frac{1}{2}\left[a_0+a_1(x',t')+\frac{2}{n-1}a_1(x',t')-\frac{2a_0}{n-1}\right]=\frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}$$

Վերջին հավասարումը, որի մեջ տեղադրվում է x' և y' որպես x, y, t ֆունկցիաներ, $y\big|_{x=R(t)}=0$ եզրային պայմանի դեպքում ծառայում է $y=f(x,t)$ հարվածող ալիքի որոշման համար:

Հարվածող ալիքի որոշման համար ստացվում է առաջին կարգի մասնական ածանցյալներով հավասարում, որը լուծվում է թվային եղանակով: 1 և 2 աղյուսակներում բերված է t ժամանակի և x կոորդինատի մի շարք արժեքների համար հաշվումների արդյունքները ջրի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *А. А. Гриб, А. Г. Рябинин, С. А. Христианович*, ПММ, 1956, № 20, вып. 4.

2 *А. Г. Багдоев, Э. М. Нерсесян*, Известия АН СССР, ОТН, 1960.