ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

L 1970 5

МАТЕМАТИКА

Н. Г. Галстян

## О геометрии изотропных поверхностей

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 10/I 1970)

1. В $V_n$ с неопределенной метрикой $ds^2 = a_{\alpha\beta}(y)\, dy^\alpha dy^\beta$* уравнения

$$y^\alpha = y(x^1, x^2, \cdots, x^m); \text{ ранг } (y_i^\alpha) = m; \; y_i^\alpha \equiv \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \tag{1.1}$$

задают поверхность $X_m$ с метрическим тензором

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta} y_i^\alpha y_j^\beta. \tag{1.2}$$

Обозначим через $r =$ ранг $(g_{ij})$. Если $r = m$, то в $X_m$ индуцируется риманово перенесение и $X_n$ является $V_m$.

Определение: $X_m$ называется изотропной поверхностью, если $r < m$ и обозначается через $V_m^p$, где $p = m - r$.

В общем случае уравнения

$$a_{\alpha\beta} y_i^\beta n^\alpha = 0 \tag{1.3}$$

имеют $(n - m)$ линейно-независимые решения, т. е. существуют $(n - m)$ вектора — нормальные к $X_m$.

Если $r = m$, то существуют $(n - m)$ взаимно-ортогональные неизотропные вектора, нормальные к $V_m$. Если же $r < m$, то существуют $p$ линейно-независимые изотропные вектора $\overset{a}{\mu}{}^\alpha$ и $(n - m - p)$ другие неизотропные вектора $\underset{q}{n}{}^\alpha$, ортогональные к первым ([1], стр. 177).

$$\begin{aligned} &\text{а) } a_{\alpha\beta} \overset{a}{\mu}{}^\alpha y_i^\beta = 0; \quad \text{б) } a_{\alpha\beta} \overset{a}{\mu}{}^\alpha \overset{b}{\mu}{}^\beta = 0; \\ &\text{в) } a_{\alpha\beta} \underset{p}{n}{}^\alpha \overset{a}{\mu}{}^\beta = 0; \quad \text{г) } a_{\alpha\beta} \underset{p}{n}{}^\alpha \underset{q}{n}{}^\beta \begin{cases} e_p; & p = q \\ 0; & p \neq q, \end{cases} \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $e_p = \pm 1$. Имеет место следующая

* Предполагается, что $\alpha, \beta, \gamma, \rho\sigma, \nu = 1, 2, \cdots, n$;
$i, j, k, l, h \cdots = 1, 2, \cdots, m$;
$a, b, c, d \cdots 1, 2, \cdots, p$; $\quad p, q, r, s \cdots = p+1, p+2, \cdots$
$e, f, g = 1, 2, \cdots, (n - m)$.

Теорема 1. 1. *Для того, чтобы $X_m$ было $V_m^p$, необходимо и достаточно, чтобы из $(n-m)$ векторов, ортогональных к $X_m$, $P$ вектора удовлетворяли условиям* (22.6а), (22.6б) *и* (22,6в).

Если $r<m$, то существуют линейно-независимые вектора $\overset{a}{\mu}_i$, удовлетворяющие условию.

$$\overset{a}{\mu}{}^i g_{ij} = 0, \tag{1.5}$$

которые определяют в $V_n$ $p$—линейно-независимые изотропные вектора — нормальные к $V_m^p$ и удовлетворяющие условиям (1.4б) и (1.4в)

$$\overset{a}{\mu}{}^\alpha = \overset{a}{\mu}{}^i y_i^\alpha. \tag{1.6}$$

Это означает, что $p$ нормалей к $V_m^p$ лежат на касательной гиперплоскости $E_m$ к $V_m^p$. Следовательно, оснащение $V_m^p$ с помощью векторов $\overset{a}{\mu}{}^\alpha$ и $\underset{p}{n}{}^\alpha$ невозможно.

Для оснащения $V_m^p$ используем векторы $\underset{p}{n}{}^\alpha$ и $\underset{a}{n}{}^\alpha$. Последние определяются следующим образом: возьмем векторы $\underset{a}{\lambda}_i$, удовлетворяющие условиям

$$\overset{c}{\mu}{}^i \underset{a}{\lambda}_i = \delta_a^c, \tag{1.7}$$

а в остальном они произвольны. Из уравнений

$$\text{а)}\ a_{\alpha\beta} y_i^\alpha \underset{a}{n}{}^\beta = \underset{a}{\lambda}_i, \quad \text{б)}\ a_{\alpha\beta} \underset{p}{n}{}^\alpha \underset{a}{n}{}^\beta = 0,$$

$$a_{\alpha\beta} \underset{a}{n}{}^\alpha \underset{b}{n}{}^\beta = \begin{cases} l_a; & a = b \\ 0; & a \neq b \end{cases} \tag{1.8}$$

определяются $\underset{a}{n}{}^\alpha$ с произволом

$$\underset{a}{\overline{n}}{}^\alpha = \underset{a}{n}{}^\alpha + q_{ab} \overset{b}{\mu}{}^\alpha; \quad q_{ab} = -q_{ba}, \tag{1.9}$$

где $q_{ab}$ — скалеры.

В случае $p=1$, из уравнений (1.8) $\underset{a}{n}{}^\alpha$ определяются однозначно

Пусть система векторов $\underset{a}{n}{}^\alpha$ является решением уравнений (1.8), тогда системы векторов $\underset{a}{n}{}^\alpha$, $\underset{p}{n}{}^\alpha$ и $y_i^\alpha$ линейно-независимые.

Векторы $\underset{a}{n}{}^\alpha$ и $\underset{p}{n}{}^\alpha$ образуют базис оснащающего $E_{n-m}$. Уравнения, определяющие индукцированную связность на оснащенный $V_m^p$, имеют вид:

$$\partial_k y_i^\alpha - y_l^\alpha \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha y_i^\rho y_k^\sigma = \overset{\kappa}{b}_{ik} \underset{\kappa}{n}{}^\alpha, \tag{1.10}$$

где $\Gamma_{ik}^l$ и $\Gamma_{\rho\sigma}^\alpha$—коэффициенты связностей $V_m^p$ и $V_n$ соответственно, а

$\overset{g}{b}_{ik}$ — компоненты вторых квадратичных форм $V_m^p$. Из этих уравнений имеем

$$y^{\alpha}_{,ik} = \nabla_k y^{\alpha}_i = \sum_g \overset{g}{b}_{ik} \overset{g}{n}{}^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} y^{\beta}_i y^{\gamma}_k. \tag{1.11}$$

2. Версор. Поскольку метрический тензор $V_m^p$ пониженного ранга, то нельзя ввести его контравариантные компоненты обычным путем. Составим тензор

$$c_{ij} = g_{ij} + \sum_a \overset{a}{\lambda}_i \overset{a}{\lambda}_j, \tag{2.1}$$

который в силу (1.7) является невырожденным, т. е. ранг $(c_{ij}) = m$. Простой проверкой убедимся, что

$$c_{ij} \overset{a}{\mu}{}^i = \overset{a}{\lambda}_j; \; c^{ij} \overset{a}{\lambda}_j = \overset{a}{\mu}{}^i$$

$$c_{ij} \overset{a}{\mu}{}^i \overset{c}{\mu}{}^j = c^{ij} \overset{a}{\lambda}_i \overset{c}{\lambda}_j = \begin{cases} l_a; & a = c \\ 0; & a \neq c. \end{cases} \tag{2.2}$$

Определим тензор

$$g^{ij} = c^{ij} - \sum_a \overset{a}{\mu}{}^i \overset{a}{\mu}{}^j, \tag{2.3}$$

который является аналогом контравариантного метрического тензора для неизотропных поверхностей.

Оказывается, что

$$\text{а) ранг } (g^{ij}) = r; \quad \text{б) } g^{ij} \overset{a}{\lambda}_i = 0. \tag{2.4}$$

В силу (1.4), (1.8) и (2. 3) определяется выражение

$$g^{ij} y^{\alpha}_i y^{\beta}_j = n^{\alpha\beta} + \sum_a \overset{a}{\mu}{}^{\alpha} \overset{a}{\mu}{}^{\beta} - \sum_q \overset{q}{n}{}^{\alpha} \overset{q}{n}{}^{\beta} - 2 \sum_c \overset{c}{\mu}{}^{(\alpha} \overset{c}{n}{}^{\beta)}, \tag{2.5}$$

которое используется при нахождении тензора кривизны и тензора Риччи.

3. Тензоры $\overset{g}{b}_{ij}$. Определение $\Gamma^l_{ij}$. Ковариантным дифференцированием (1.2), с помощью (1.7) и (1.8), находим:

$$g_{ij,k} = \nabla_k g_{ij} = \overset{a}{\lambda}_i \overset{a}{b}_{jk} + \overset{a}{\lambda}_j \overset{a}{b}_{ik} \tag{3.1}$$

откуда получим

$$g_{ek} \Gamma^k_{ij} = T_{l,ij} - \overset{a}{\lambda}_l \overset{a}{b}_{ij}, \tag{3.2}$$

где $T_{l,ij}$ — символы Кристофеля, составленные из $g_{ij}$. Свертывание с $\overset{c}{\mu}{}^l$ дает

$$\overset{c}{b}_{ij} = \overset{c}{\mu}{}^l T_{l,ij} \tag{3.3}$$

Теорема 3. 1. *Компоненты тензоров вторых квадратичных форм в случае $c = 1, 2, \cdots, p$ выражаются через символы Кристофеля и компоненты соответствующего вектора нормали, и не зависят от оснащения.*

Заметим, что в силу (1.5)

$$\overset{a}{\mu}{}^{l} \overset{c}{b}_{lj} = - \overset{c}{\mu}{}^{l} \overset{a}{b}_{lj}, \tag{3.4}$$

т. е. тензоры $\overset{a}{b}_{ij}$ — вырожденные, ранг $(\overset{c}{b}_{ij}) \leqslant m-1$. Ковариантно дифференцируя выражения (1.4а) и (1.4в), получим соответственно ([2], стр. 95)

$$\overset{a}{b}_{lk} = - a_{\alpha\beta} y_l^{\alpha} (\overset{c}{\mu}{}^{\beta}_{,k} + \Gamma^{\beta}_{\rho\sigma} y_l^{\rho} \overset{c}{\mu}{}^{\sigma}) = - a_{\alpha\beta} y_l^{\alpha} \overset{c}{\mu}{}^{\beta}_{,\gamma} y_k^{\gamma}; \tag{3.5}$$

$$\overset{p}{b}_{lk} = - a_{\alpha\beta} y_l^{\alpha} (\underset{p}{n}{}^{\beta}_{,k} + \Gamma^{\beta}_{\rho\sigma} y_l^{\rho} \underset{p}{\overset{c}{n}}{}^{\sigma}) = - a_{\alpha\beta} y_l^{\alpha} \underset{p}{n}{}^{\beta}_{,\gamma} y_k^{\gamma}. \tag{3.6}$$

Формула Вайнгартена для изотропных поверхностей имеет вид:

$$\overset{c}{\mu}{}^{h}_{,k} = - \overset{c}{b}_{lk} g^{hl} - \overset{a}{\mu}{}^{h} \overset{c}{\mu}{}^{l} \underset{a}{\lambda}_{l,k}; \tag{3.7}$$

$$\overset{c}{\mu}{}^{\alpha}_{,k} = - g^{hl} \overset{c}{b}_{hk} y_l^{\alpha} - \overset{c}{\mu}{}^{l} \overset{a}{\mu}{}^{\alpha} \underset{a}{\lambda}_{l,k} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} \overset{c}{\mu}{}^{\rho} y_k^{\sigma}. \tag{3.8}$$

Свертывая (1.10) с $a_{\alpha\beta} y_l^{\beta}$ и $a_{\alpha\beta} \underset{a}{n}{}^{\beta}$, суммируя по $a$ и складывая почленно, получим:

$$c_{lk} \Gamma^{k}_{ij} = (g_{lk} + \sum_a \underset{a}{\lambda}_l \underset{a}{\lambda}_k) \Gamma^{k}_{ij} = T_{l,\,ij} -$$

$$- 2 \underset{a}{\lambda}_l \overset{a}{b}_{ij} + a_{\alpha\beta} (\partial_j y_i^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} y_i^{\rho} y_j^{\sigma}) \sum_a \underset{a}{\lambda}_l \underset{a}{n}{}^{\beta}, \tag{3.9}$$

откуда определяются коэффициенты аффинной связности

$$\Gamma^{h}_{ij} = g^{hl} T_{l,\,ij} - \sum_a \overset{a}{\mu}{}^{l} \overset{a}{b}_{ij} + a_{\alpha\beta} (\partial_k y_i^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} y_i^{\rho} y_j^{\sigma}) \overset{a}{\mu}{}^{h} \underset{a}{n}{}^{\rho}. \tag{3.10}$$

Введя обозначения:

$$\overline{\Gamma}{}^{l}_{ij} = g^{lh} T_{hij} + a_{\alpha\beta} \partial_j y_i^{\alpha} \overset{a}{\mu}{}^{h} \underset{a}{n}{}^{\beta}; \tag{3.11}$$

$$P^{h}_{ij} = \sum_a \overset{a}{\mu}{}^{h} b_{ij} + \underset{a}{n}{}^{\beta} \overset{a}{\mu}{}^{h} a_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} y_i^{\rho} y_j^{\sigma}. \tag{3.12}$$

можно коэффициенты аффинной связности и тензор кривизны записать соответственно в виде

$$\Gamma^{l}_{ij} = \overline{\Gamma}{}^{l}_{ij} + P^{l}_{ij} \tag{3.13}$$

$$R^{l}_{\cdot ijk} = K^{l}_{\cdot ijk} - 2P^{l}_{i[j,\,k]} - 2P^{l}_{h[j} P^{h}_{k]i}, \tag{3.14}$$

где $K^{l}_{ijk}$ тензор Римана, составленный из $\overline{\Gamma}{}^{l}_{ij}$.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. З. Петрову.

Ереванский государственный
университет

Ն. Գ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

## Իզոտրոպ մակերևույթների երկրաչափության մասին

*Հոդվածում դիտարկվում է n-չափանի Ռիմանի տարածության իզոտրոպ մակերևույթները։ Կատարվում է մակերևույթի ոչ-ինվարիանտ հագեցում, ներմուծվում է վերսոր, որի օգնությամբ որոշվում են մակերևույթի երկրորդ տենզորները, աֆինական կապակցության գործակիցները, Ռիմանի տենզորը։*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Л. П. Эйзенхарт*, Риманова геометрия, ГИИЛ, М., 1948. 2 *И. А. Скоутен, Дж. Стройк*, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, II. ГИИЛ, М., 1948. 3 *Н. Г. Галстян*, ДАН Арм. ССР, XLV, № 3 (1967). 4 *Н. Г. Галстян*, Сб. «Гравитация и теория относительности», вып. 4—5, изд. КГУ, 1968. 5 *Н. Г. Галстян*, Тезисы 5-ой международной конференции по гравитации и теории относительности, Тбилиси, 1968.