ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LII 1971 1

УДК 513.7

МАТЕМАТИКА

Н. Г. Галстян

# Инвариантное оснащение изотропных поверхностей одного класса

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 28/IX 1970)

В предыдущих статьях ([1–3]) автора указывается метод конкретного выбора вектора нормали и дается общий метод инвариантного оснащения для случая просто-регулярных и просто-нерегулярных изотропных гиперповерхностей, за исключением некоторых особых классов, требующих специального изучения. В работе ([4]), с помощью произвольных векторов $\underset{a}{n}^{\alpha}$, производится оснащение $V^{p}_{m}$, вводится версор, определяются компоненты вторых квадратичных форм, коэффициенты аффинной связности, тензор кривизны изотропной поверхности.

В данной работе автору удается указать метод инвариантного оснащения для случая просто-регулярных изотропных поверхностей $V^{1}_{m}$*.

Формулы из работы ([4]) будут приведены с сохранением нумерации формул соответственно в виде (4. 1.5), (4. 2.1.) и т. д.

1. *Преобразование оснащения.* Как видно из формулы (4. 1.6), из $(n-m)$ векторов, нормальных к изотропной поверхности $V^{p}_{m}$, $p$ вектора лежат на касательной гиперповерхности $E_m$ к $V^{p}_{m}$ и для оснащении $V^{p}_{m}$ появилась необходимость взять произвольные $P$-вектора $\underset{a}{n}^{\alpha}$, не лежащие на $E_m$, так, чтобы они с векторами $\underset{q}{n}^{\alpha}$ образовали базис оснащающего $E_{n-m}$.

Так как векторы $\underset{q}{n}^{\alpha}$ определяются однозначно, с точностью до автоморфизмов

$$\underset{q}{\overline{n}}^{\alpha} = t^{s}_{q} n^{\alpha} \quad \text{ранг} \quad (t^{s}_{q}) = n - m - \tag{1.1}$$

при котором не меняются коэффициенты аффинной связности, контравариантные компоненты метрического тензора и другие величины, то

* Предполагается, что $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma, \nu = 1, 2, \cdots, n$;

$i, j, k, l, h \cdots = 1, 2, \cdots, m$,

$a, b, c, d \cdots = 1, 2, \cdots, p$; $q, r, s \cdots = p+1, p+2, \cdots$

$l, f, g = 1, 2, \cdots, (n-m)$

мы будем рассматривать преобразование оснащения в самом общем случае

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \overline{n}{}^{\alpha}_{q} = n^{\alpha}_{q};\\
&\text{б)}\quad \overline{n}{}^{\alpha}_{a} = q^{c}_{a} n^{\alpha}_{c} + t^{l}_{a} y^{\alpha}_{l};\quad \text{ранг}\ (q^{c}_{a}) = p.\\
&\text{в)}\quad \overset{a}{\overline{\mu}}{}^{\alpha} = p^{a}_{c} \overset{c}{\mu}{}^{\alpha};\quad \text{ранг}\ (p^{a}_{c}) = p.\\
&\text{г)}\quad \overline{\lambda}_{l\,a} = q^{c}_{a} \lambda_{l\,c} + g_{le} t^{l}_{a}.\\
&\text{д)}\quad \overset{a}{\overline{\mu}}{}^{l} = p^{a}_{c} \overset{c}{\mu}{}^{l}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Предположим, что при любом оснащении выполняются условия (4. 1.7), (4. 1.8б), (4. 1.8с), т. е. коэффициенты преобразования удовлетворяют следующим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\quad a_{\alpha\beta} \overline{n}{}^{\alpha}_{a} \overline{n}{}^{\beta}_{c} = \sum_{d} l_{d} q^{d}_{a} q^{d}_{c} + 2 q^{d}_{c} t^{h}_{c} \lambda_{h\,d} +\\
&\qquad + g_{eh} t^{l}_{a} t^{h}_{c} = \begin{cases} l_{a}; & a = c\\ 0; & a \neq c \end{cases};\\
&\text{б)}\quad a_{\alpha\beta} \overline{n}{}^{\alpha}_{a} \overset{c}{\overline{\mu}}{}^{\beta} = p^{c}_{d} q^{d}_{a} = \delta^{c}_{a}.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Ввиду того, что матрицы $(p^{a}_{b})$ и $(q^{b}_{c})$ невырожденные и являются взаимно обратными, имеем

$$
p^{d}_{a} q^{c}_{d} = \delta^{c}_{a}. \tag{1.4}
$$

Законы преобразований коэффициентов аффинной связности и тензоров вторых квадратичных форм имеют вид

$$
\overline{\Gamma}{}^{l}_{ij} = \Gamma^{l}_{ij} - t^{l}_{a} p^{a}_{c} \overset{c}{b}_{ij} \tag{1.5}
$$

$$
\overset{q}{\overline{b}}_{ij} = \overset{q}{b}_{ij}; \tag{1.6}
$$

$$
\overset{a}{\overline{b}}_{ij} = p^{a}_{c} \overset{c}{b}_{ij}. \tag{1.7}
$$

Закон преобразования основных тензоров запишется в виде

$$
\overline{g}{}^{ij} = g^{ij} + 2 p^{a}_{c} \big(t^{h}_{a} \lambda_{h\,d} \overset{d}{\mu}{}^{i} \overset{c}{\mu}{}^{j} - \overset{c}{\mu}{}^{(i} t^{j)}_{a}\big); \tag{1.8}
$$

$$
\overline{c}{}^{ij} = g^{ij} - 2 p^{a}_{c} \big(t^{h}_{a} \lambda_{h\,d} \overset{d}{\mu}{}^{i} \overset{c}{\mu}{}^{j} - \overset{c}{\mu}{}^{(i} t^{j)}_{a}\big) + \sum_{a} p^{a}_{c} p^{a}_{d} \overset{c}{\mu}{}^{i} \overset{d}{\mu}{}^{j}. \tag{1.9}
$$

2. *Инвариантное оснащение* $V^1_m$. Рассмотрим изотропные поверхности, ранг метрического тензора которых равен $(m-1)$. Оказывается, что в случаях таких поверхностей можно осуществлять инвариантное оснащение таким же способом, как и в случае изотропных гиперповерхностей ([3]).

Определение: изотропную поверхность $V^1_m$ будем называть а) регулярной, если ранг $(\overset{a}{b}_{ij}) = (m-1)$, и б) нерегулярной, если ранг $(\overset{a}{b}_{ij}) = m-1-k$, $k > 0$.

Аналогичным образом определяются тензор $\overset{a}{b}{}^{ij}$, скаляры $\sigma$ и $\rho$ и производится конкретный выбор — „нормирование" изотропного вектора нормали $\overset{a}{\mu}{}^{\alpha} = \frac{1}{\sigma} \overset{a}{\mu}{}^{\alpha}$.

С помощью скаляра $\rho$, который является инвариантом, однозначно, инвариантным образом определяется вектор $\underset{a}{n}{}^{\alpha}$ из уравнений

$$\text{а)}\ a_{\alpha\beta} \underset{a}{n}{}^{\alpha} y^{\beta}_{i} = \lambda_i; \qquad \text{б)}\ a_{\alpha\beta} \underset{a}{n}{}^{\alpha} \underset{p}{n}{}^{\beta} = 0; \tag{2.1}$$

$$\text{в)}\ a_{\alpha\beta} \underset{a}{n}{}^{\alpha} \underset{a}{n}{}^{\beta} = l_a, \text{ где } l_a = \pm 1\ \lambda_i = \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \Big/ \mu^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i},$$

который с векторами $\underset{p}{n}{}^{\alpha}$ образует базис оснащающего $E_{n-m}$.

Укажем также и второй способ инвариантного оснащения. После конкретного выбора изотропного вектора нормали из уровней

$$\mu^k \mu^l_{.k} = \tau \mu^l \tag{2.2}$$

следует, что $\tau$ является инвариантом. Имеет место следующая

Теорема 1: *Если для случая просто-регулярных $V^1_m$ скаляр $\tau = 0$, то уравнения*

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ a_{\alpha\beta} n^{\alpha} \mu^{\beta}_{.\gamma} y^{\gamma}_{k} = 0; \\ &\text{б)}\ a_{\alpha\beta} n^{\alpha} \underset{q}{n}{}^{\beta} = 0; \\ &\text{в)}\ a_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta} = 1; \\ &\text{г)}\ a_{\alpha\beta} n^{\alpha} \mu^{\beta} = 1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

*однозначно определяют вектор $n^{\alpha}$, который с векторами $\underset{q}{n}{}^{\alpha}$ образует базис оснащающего $E_{n-m}$.*

Решить задачу инвариантного оснащения $V^p_m$ $(p > 1)$ таким способом, как для $V^1_m$, не удается, так как

$$\overset{c}{\mu}{}^i \overset{a}{b}_{il} \neq 0, \quad a \neq c$$

и скаляр $\sigma$ — не является инвариантом.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность профессору А. З. Петрову за ценные замечания.

Ереванский государственный
университет

Ն. Գ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

## Իզոտրոպ մակերևույթների մի դասի ինվարիանտ հագեցումը

*Այս հոդվածը, ըստ էության, հանդիսանում է ([4]) աշխատության շարունակությունը, որտեղ դիտարկվում էր ռիմանյան $V_n$ տարածության իզոտրոպ $V_m^p$ մակերևույթները, որոնց մետրիկական տենզորի ռանգը փոքր էր $m$-ից: $V_m^p$-ի ոչ ինվարիանտ հագեցման միջոցով որոշված էին մակածված կապակցության գործակիցները, երկրորդ տենզորները, ներմուծված էր վերսոր, որը կարևոր դեր է խաղում մակերևույթների երկրաչափության մեջ:*

*Այս հոդվածում դիտարկվում է հագեցման ձևափոխությունը: Արտածվում է հիմնական տենզորների ձևափոխության օրենքը՝ հագեցման ձևափոխման ժամանակ և նշվում է $V_m^1$ տարածության ինվարիանտ հագեցման երկու մեթոդ:*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Г. Галстян,* Сб. «Гравитация и теория относительности», вып. 4—5, изд. КГУ, 1968. [2] *Н. Г. Галстян,* ДАН Арм. ССР, т. XLIX, № 4 (1969). [3] *Н. Г. Галстян,* ДАН Арм. ССР, т. L, № 3 (1970). [4] *Н. Г. Галстян,* ДАН Арм. ССР, т. L, № 5 (1970). [5] *А. Е. Либер,* Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 13, М., 407—446, 1968. [6] *В. А. Атанасян,* ДАН СССР, 98, 15, 701—704 (1954).