ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLIX 1969 4

МАТЕМАТИКА

УДК 513.7

Н. Г. Галстян

О геометрии изотропных гиперповерхностей

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 9/VI 1969)

Данная работа является продолжением работ ([1–3]). В работе для поднятия и опускания индексов вводится версор, с помощью которого проще получается тензор кривизны (см. ([3])), устанавливаются законы преобразований основных величин при преобразовании оснащения, указывается метод для конкретного выбора вектора нормали и строятся инварианты.

В дальнейшем изложении понадобятся ссылки на формулы из работ ([1–3]). Они будут приведены с сохранением нумерации формул соответственно в виде (2. 1. 5), (3. 2. 6), (1. 0. 9.) и т. д.

1. Введение. В V_n рассмотрим изотропную гиперповерхность V^1_{n-1}

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1; x^2; \cdots; x^{n-1})^{1)};\ \text{ранг}\ (y^\alpha_i) = (n-1);\ y^\alpha_i \equiv \frac{dy^\alpha}{dy^i} \tag{1.1}$$

с метрическим тензором

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta}\, y^\alpha_i\, y^\beta_j;\ \text{ранг}\ (g_{ij}) = (n-2)^{2)}. \tag{1.2}$$

Существует вектор μ^i, который определяет в V_n изотропный вектор μ^α — нормальный к этой гиперповерхности

$$\mu^i g_{ij} = 0;\ \mu^\alpha = \mu^i y^\alpha_i;\ a_{\alpha\beta}\,\mu^\alpha \mu^\beta = 0. \tag{1.3}$$

Возьмем произвольный вектор λ_i, удовлетворяющий условию

$$\mu^i \lambda_i = 1 \tag{1.4}$$

с помощью которого однозначно определяется изотропный вектор n^α, не лежащий на V^1_{n-1}

$$\lambda_i = a_{\alpha\beta}\, n^\alpha y^\beta_i;\ a_{\alpha\beta}\, n^\alpha n^\beta = 0;\ a_{\alpha\beta}\, n^\alpha \mu^\beta = 1. \tag{1.5}$$

С помощью вектора n^α производится оснащение V^1_{n-1}, определяются коэффициенты аффинной связности и другие величины, связанные с этой гиперповерхностью (см. ([1–3])).

2. Версор. Составим тензор, который в силу (1.4) является невырожденным (см. ([3])).

---

[1] Предполагается, что $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \nu, \sigma = 1, 2 \cdots, n$; $i, j, k, l, h, m = 1, 2, \cdots (n-1)$.

[2] Ранг (g_{ij}) не может быть меньше $(n-2)$.

$$C_{ij} = g_{ij} + \lambda_i \lambda_j; \ \mathrm{Det}\,(c_{ij}) \neq 0 \tag{2.1}$$

Взаимный тензор C_{ij} определяется из уравнений $C^{ij} C_{ik} = \delta^i_k$.
Отметим, что в силу (1.3) и (1.4)

$$c_{ij} \mu^i = \lambda_j; \ c^{hj} \lambda_j = \mu^h; \ c_{ij} \mu^i \mu^j = c^{ij} \lambda_i \lambda_j = 1. \tag{2.2}$$

Определим тензор

$$g^{ij} = c^{ij} - \mu^i \mu^j, \tag{2.3}$$

который будет удовлетворять условиям

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k - \mu^i \lambda_k; \ g^{ij} \lambda_j = 0. \tag{2.4}$$

Доказывается, что ранг $(g^{ij}) = (n-2)$.

При поднятии и опускании индексов с помощью c^{ij} и c_{ij} сохраняется длина вектора

$$g^{ij} P_i P_j = g_{ij} P^i P^j; \ P_i = c_{ij} P^j. \tag{2.5}$$

Имеют место соотношения

$$c^{ij} y^\alpha_i \ y^\alpha_j = a^{\alpha\beta} + \mu^\alpha \mu^\beta - n^\alpha \mu^\beta - n^\beta \mu^\alpha, \tag{2.6}$$

$$g^{ij} y^\alpha_i \ y^\beta_j = a^{\alpha\beta} - n^\alpha \mu^\beta - n^\beta \mu^\alpha. \tag{2.7}$$

С помощью этих выражений из (2. 2. 5), (4. 0. 8) и (3. 3. 10) получаются выражения тензора кривизны и тензора Риччи

$$R^h_{ijk} = (\mu^h n^\beta + g^{hl} y^\beta_l) R_{\beta\rho\nu\sigma} y^\rho_i y^\nu_j y^\sigma_k + 2 g^{hl} \lambda_{i[k} b_{j]l}, \tag{2.8}$$

$$R_{ik} \equiv R^h_{ihk} = (R_{\rho\sigma} - n^\nu \mu^\beta R_{\beta\rho\nu\sigma}) y^\rho_i y^\sigma_k + 2 g^{hl} \lambda_{i[k} b_{h]l}. \tag{2.9}$$

3. Преобразование оснащения. Пусть исходное оснащение определено вектором n^α, удовлетворяющим условиям (1.5), а новое оснащение вектором $\overline{n}^\alpha$

$$\overline{n}^\alpha = P n^\alpha + P^i y^\alpha_i; \ \overline{\lambda}_i = P \lambda_i + g_{ih} P^h; \ \overline{\mu}^i = \frac{1}{P} \mu^i, \tag{3.1}$$

удовлетворяющим условиям

$$a_{\alpha\beta} \overline{n}^\alpha \ \overline{\mu}^\beta = 1; \ a_{\alpha\beta} \overline{n}^\alpha \overline{n}^\beta = 2 P \lambda_i P^i + g_{ei} P^i P^h = 0. \tag{3.2}$$

Из (1. 1. 12) и (3. 0. 7) находим

$$\overline{b}_{ij} = \frac{1}{P} b_{ij}. \tag{3.3}$$

Свертыванием уравнений (2. 1. 5)

$$d_k y^\alpha_i - y^\alpha_l \overline{\Gamma}^l_{ik} + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} y^\rho_i y^\sigma_k = \overline{b}_{ik} \overline{n}^\alpha \tag{3.4}$$

с y_n (векторы репера, взаимного с (n^α, y^α_e)), получим

$$\overline{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} - \frac{1}{P} P^h b_{ik}. \tag{3.5}$$

Законы преобразования тензоров g^{ij} и C^{ij} имеют вид:

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij} - \frac{1}{P}(\mu^i P^j + \mu^j P^i), \tag{3.6}$$

$$\bar{C}^{ij} = C^{ij} - \frac{1}{P}(\mu^i P^j + \mu^j P^i) + \mu^i \mu^j \left(\frac{1}{P^2} - 1\right). \tag{3.7}$$

Если воспользоваться единичным вектором оснащения, то условия (3.2) заменяются условиями

$$a_{\alpha\beta}\, \bar{\mu}^\alpha \bar{n}^\beta = 1;\; a_{\alpha\beta}\, \bar{n}^\alpha \bar{n}^\beta = P^2 + 2P\lambda_e P^l + g_{eh} P^l P^h = 1 \tag{3.8}$$

и

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij} - \frac{1}{P}(\mu^i P^j + \mu^j P^i) + \mu^i \mu^j \left(\frac{1}{P^2} - 1\right). \tag{3.9}$$

$$\bar{C}^{ij} = C^{ij} - \frac{1}{P}(\mu^i P_j + \mu_j P^i) + 2\mu^i \mu^j \left(\frac{1}{P^2} - 1\right). \tag{3.10}$$

Законы преобразования в случае $P = 1$ одинаковы для изотропного и единичного векторов оснащения:

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij} - \mu^i P^j + \mu^j P^i, \tag{3.11}$$

$$\bar{C}^{ij} = C^{ij} - \mu^i P^j + \mu_j P^i. \tag{3.12}$$

4. Регулярные гиперповерхности. Изотропную гиперповерхность будем называть регулярной, если ранг $(b_{ij}) = (n-2)$ и нерегулярной, если ранг $(b_{ij}) = n-2-k$, $k > 0$, см. ([4, 5]). В этой статье рассмотрим регулярные V^1_{n-1}. Введем невырожденный тензор

$$\gamma_{ij} = b_{ij} + \lambda_i \lambda_j;\; \mathrm{Det}(\gamma_{ij}) \neq 0 \tag{4.1}$$

Взаимный тензор γ^{ij} определяется из уравнений $\gamma^{ij}\gamma_{jk} = \delta^i_k$. Определим тензор

$$b^{ij} = \gamma^{ij} - \mu^i \mu^j, \tag{4.2}$$

удовлетворяющий условиям

$$b^{ij} b_{jk} = \delta^i_k - \mu^i \lambda_k;\; b^{ij}\lambda_i = 0. \tag{4.3}$$

Закон преобразования b^{ij}, при преобразовании оснащения, запишется в виде

$$\bar{b}^{ij} = Pb^{ij} - (\mu^j b^{ih} + \mu^i b^{jh})P + \delta\mu^i \mu^j, \tag{4.4}$$

где $P_h = C_{hl} P^l$; $\delta = -b^{hl} P_n P_l$.

Закон преобразования b^{ij} одинаков, независимо от того пользуемся мы изотропным или единичным вектором оснащения.

5. Выбор вектора μ^α. Определим скаляры

$$\sigma = g^{ij} b_{ij};\; \rho = g_{ij} b^{ij}. \tag{5.1}$$

При преобразовании оснащения

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{P}\sigma;\; \bar{\rho} = P\rho. \tag{5.2}$$

Если $\sigma \neq 0$, то такую гиперповерхность V^1_{n-1} будем называть просто-регулярной.

Первое соотношение подсказывает нам в (3.1) взять $P = \sigma$, тогда

$$\bar{\sigma} = \bar{g}^{ij}\bar{b}_{ij} = 1;\ \bar{\mu}^\alpha = \frac{1}{\sigma}\mu^\alpha. \tag{5.3}$$

Докажем, что условие (5.3) определяет вектор μ^α (точнее, скалярный множитель при μ^α), однозначно, т. е. вектор μ^α получается один и тот же, независимо от того, отправляемся мы от вектора $\overset{\alpha}{\mu_1}$ или от вектора $\overset{\alpha}{\mu_2}$. Обозначаем через σ_1 и σ_2 скаляры, которые получаются при выборе векторов $\overset{\alpha}{\mu_1}$ и $\overset{\alpha}{\mu_2}$ соответственно. Отправляясь от вектора $\overset{\alpha}{\mu_1}$, получим вектор $\bar{\mu}^\alpha = \frac{1}{\sigma_1}\overset{\alpha}{\mu_1}$, а отправляясь от вектора $\overset{\alpha}{\mu_2}$, получим вектор $\bar{\bar{\mu}}^\alpha = \frac{1}{\sigma_2}\overset{\alpha}{\mu_2}$. Поскольку векторы $\overset{\alpha}{\mu_1}$ и $\overset{\alpha}{\mu_2}$ отличаются один от другого скалярным множителем $\overset{\alpha}{\mu_1} = \frac{1}{q}\overset{\alpha}{\mu_2}$, то $\sigma_1 = \frac{1}{q}\sigma_2$. В силу этих соотношений

$$\bar{\mu}^\alpha = \frac{1}{\sigma_1}\overset{\alpha}{\mu_1} = \frac{1}{\sigma_1}\cdot\frac{1}{q}\overset{\alpha}{\mu_2} = \frac{1}{\sigma_2}\overset{2}{\mu_\alpha} = \bar{\bar{\mu}}^\alpha. \tag{5.4}$$

Следовательно, для просто-регулярных гиперповерхностей всегда μ^α будем выбирать так, чтобы имело место первое условие (5.3).

При конкретном выборе μ^α из первого уравнения (3.2) следует, что $P = 1$. А при таких преобразованиях из (5.2), следует, что ρ является инвариантом. Из (3. 3. 10) следует, что

$$g_{il}\,\bar{\mu}^h\,\bar{R}^l_{hjk} = g_{il}\,\mu^h R^l_{hjk}. \tag{5.5}$$

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. З. Петрову.

Ереванский государственный
университет

Ն. Գ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

Իզոտրոպ մակերևույթների երկրաչափության մասին

Այս հոդվածը հանդիսանում է (1—3) հոդվածների շարունակությունը։ Դիտարկվում է V_n տարածության իզոտրոպ հիպերմակերևույթները։ Հոդվածում ներմուծվում է վերսոր, որի օգնությամբ հեշտությամբ ստացվում են կորության և Ռիչի տենզորները։ Ստացված են հիմնական մեծությունների ձևափոխության օրենքները հագեցման վեկտորի ձևափոխության դեպքում։ Տրված է նորմալի վեկտորի կոնկրետ ընտրման մեթոդ և կառուցված են ինվարիանտներ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Г. Галстян,* ДАН Арм. ССР т. 45, № 3 (1967). [2] *Н. Г. Галстян,* сб. «Гравитация и теория относительности», вып. 4—5, изд. КГУ, 1968. [3] *Н. Г. Галстян,* «Тезисы 5-4 международной конференции по гравитации и теории относительности», Тбилиси, 1968. [4] *В. А. Атанасян,* ДАН СССР, 98, 15 701—704, (1954). [5] *А. Е. Либер,* Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 13, М., 407—446, 1968.