ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LV 1972 1

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Талалян

О подсистемах системы Хаара

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 25/I 1972)

Введение. Известна следующая теорема П. Л. Ульянова ([1]) и А. М. Олевского ([2]).

Теорема. *По любой полной ортогональной системе существует ряд из L_2, который после некоторой перестановки расходится почти всюду.*

В связи с этим представляет интерес описать те подсистемы конкретных полных ортогональных систем, которые обладают свойством, выражаемым приведенной теоремой. В настоящей заметке этот вопрос исследуется для системы Хаара. Соответствующая теорема доказывается в параграфе 1. В параграфе 2 доказывается, что указанным свойством обладают почти все подсистемы системы Хаара.

1. Если $\chi_n(x)$ — функции Хаара, то обозначим

$$\Delta_n = \{x \in [0,1] : \chi_n(x) \neq 0\}.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы по подсистеме $\{\chi_{n_k}(x)\}$ системы Хаара существовал ряд из L_2, расходящийся почти всюду после некоторой перестановки, необходимо и достаточно, чтобы*

$$m(\limsup_{k\to\infty} \Delta_{n_k}) = 1. \tag{1.1}$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть выполняется (1.1). Тогда

$$m\Big(\bigcup_{k=l}^{\infty} \Delta_{n_k}\Big) = 1, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

Пусть $\varepsilon_p > 0$ и $\sum \varepsilon_p < \infty$. Возьмем последовательность $k_0 = 0 < k_1 < k_2 < \ldots$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$m\Big(\bigcup_{l=k_{p-1}+1}^{k_p} \Delta_{n_l}\Big) > 1 - \varepsilon_p, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

Можно предполагать, что при любом p интервалы $\Delta_{n_{k_{p-1}+1}}, \ldots, \Delta_{n_{k_p}}$ попарно не пересекаются, так как в противном случае из пересекающихся интервалов мы возьмем наибольший и неравенства (1.3) опять будут выполняться.

Из (1.3) следует

$$m\left(\bigcup_{q=1}^{\infty}\bigcap_{p=q}^{\infty}\bigcup_{i=k_{p-1}+1}^{k_p}\Delta_{n_i}\right)=1, \tag{1.4}$$

Теперь возьмем ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{i=k_{p-1}+1}^{k_p}\frac{1}{p}\sqrt{m(\Delta_{n_i})}\,\chi_{n_i}(x). \tag{1.5}$$

Из того, что при любом p интервалы $\Delta_{n_{k_{p-1}+1}}, \ldots, \Delta_{n_{k_p}}$ попарно не пересекаются, следует, что ряд (1.5) принадлежит L_2. С другой стороны, ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{i=k_{p-1}+1}^{k_p}\left|\frac{1}{p}\sqrt{m(\Delta_{n_i})}\,\chi_{n_i}(x)\right|$$

расходится на множестве

$$\bigcup_{p=1}^{\infty}\bigcap_{p=q}^{\infty}\bigcup_{i=k_{p-1}+1}^{k_p}\Delta_{n_i}$$

имеющем полную меру.

По теореме Е. М. Никишина и П. Л. Ульянова ([3]) члены ряда (1.5) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд расходился почти всюду. Теорема 1 доказана.

2. Рассмотрим меру μ на множестве S всех подпоследовательностей последовательности натуральных чисел N, введенную следующим образом (4).

Заданной подпоследовательности $s=\{n_i\}$ сопоставим число $T(s)= =0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, где $\alpha_{n_i}=1$ и $\alpha_j=0$, если $j\neq n_i$. Это соответствие между всеми подпоследовательностями N и точками из $(0,1]$ взаимно-однозначно. Будем считать измеримыми те подмножества $E\subset S$, для которых $T(E)$ измеримо по Лебегу, и при этом положим $\mu(E)=m(T(E))$, где m — мера Лебега.

Лемма. *Пусть $E_n\subset[0,1]$ — последовательность измеримых множеств. Тогда для почти всех $s=\{n_i\}$ из S имеет место*

$$m(\limsup_{i\to\infty}E_{n_i})=m(\limsup_{n\to\infty}E_n) \tag{2.1}$$

Доказательство. Определим на $[0,1]$ функции $\alpha_k(t)$, $k=1,2,\ldots$ из условий

1) $\quad t=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{2^k}$;

2) $\alpha_k(t)$ принимает значения 0 и 1, причем значение 1 принимает при бесконечно многих k.

Обозначим

$$A_n = \{t\in(0,1] : \alpha_n(t) = 1\}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x)\alpha_n(t), \tag{2.2}$$

где χ_E — характеристическая функция множества E.

Для любого $x\in \limsup\limits_{n\to\infty} E_n$ последовательность $\chi_{E_n}(x)$ содержит бесконечно много единиц. Если обозначить номера этих единиц через $n_i(x)$, то будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x)\alpha_n(t) = \infty \quad \text{при } t\in \limsup_{i\to\infty} A_{n_i(x)} \tag{2.3}$$

Множества A_n независимы и $m(A_n)=\frac{1}{2}$, $n=1, 2, \ldots$. Поэтому, согласно лемме Бореля-Кантелли,

$$m\left(\limsup_{i\to\infty} A_{n_i(x)}\right) = 1 \tag{2.4}$$

для любого $x\in \limsup\limits_{n\to\infty} E_n$.

Из (2.3) и (2.4) следует, что для любого $x\in \limsup\limits_{n\to\infty} E_n$ ряд (2.2) расходится почти всюду по $t\in[0,1]$. Тогда из теоремы Фубини следует, что для почти всех $t\in[0,1]$ ряд (2.2) расходится по x почти всюду на $\limsup\limits_{n\to\infty} E_n$. Это, как легко видеть, равносильно утверждению леммы.

Из леммы и теоремы 1 следует

Теорема 2. *По почти всем подсистемам системы Хаара существуют ряды из L_2, расходящиеся почти всюду после некоторой перестановки.*

Ереванский государственный
университет

Ֆ. Ա. ԹԱԼԱՅԱՆ

Հաարի սիստեմի ենթասիստեմների մասին

Պ. Լ. Ուլյանովը (¹) *և Ա. Մ. Օլևսկին* (²) *ապացուցել են, որ ըստ ամեն մի լրիվ օրթոգոնալ սիստեմի գոյություն ունի L_2-ից շարք, որը ինչ-որ տեղափոխությունից հետո տարամիտում է համարյա ամենուրեք։*

Ներկա աշխատանքում նկարագրվում է Հաարի սիստեմի այն ենթասիստեմների դասը, որոնք օժտված են լրիվ սիստեմների նշված հատկությամբ։ Ապացուցվում է նաև, որ այդ հատկությամբ օժտված են Հաարի սիստեմի համարյա բոլոր ենթասիստեմները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. Л. Ульянов*, УМН, 16, № 3, 61—142 (1961). [2] *А. М. Олевский*, ДАН СССР, 138, № 3, 545—548 (1961). [3] *Е. М. Никишин* и *П. Л. Ульянов*, УМН, 22, № 3, 240—242 (1967). [4] *van Kampen*, Amer. J. Math. 62, 417—448 (1940).