

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Р. С. Галоян

Об асимптотических свойствах функции $\pi_p(z; z_k)$

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 22/V 1974)

1⁰. После ставших уже классическими результатов Р. Неванлинны о факторизации мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$ с ограниченной характеристикой $T(r; F)$ (1), в ранних работах М. М. Джрбашяна (2,3) рассматривались вопросы канонического представления функций более широких классов.

На этом пути им был открыт новый класс функций $\pi_\alpha(z; z_k)$ ($0 \leq \alpha < \infty$), аналитических в круге $|z| < 1$, с нулями в точках произвольной последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < +\infty \quad (0 \leq \alpha < +\infty), \quad (1)$$

Функции эти при условии (1) определялись следующим образом:

$$\pi_\alpha(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \{-U_\alpha(z; z_k)\}, \quad (2)$$

где:

$$U_\alpha(z; z_k) = \int_{|t|^p}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2+\alpha+n)}{\Gamma(2+\alpha)\Gamma(1+n)} \left(\frac{z}{z_k}\right)^n \int_0^{|z|^p} (1-t)^{\alpha+1} t^{n-1} dt.$$

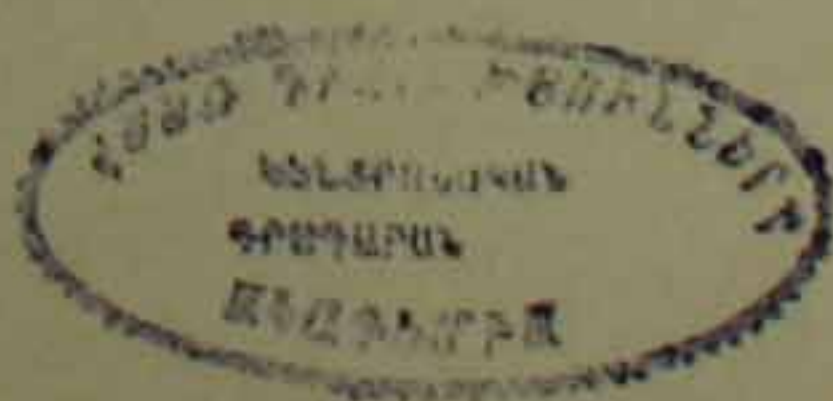
Было установлено (2), что при любом целом $\alpha = p \geq 1$ функция имеет такую же структуру, что и бесконечное произведение Вейерштрасса, а именно:

$$\pi_p(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1 - |z_k|^2}{1 - z\bar{z}_k}\right) \exp \left\{ \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \left(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - z\bar{z}_k}\right)^n \right\}, \quad (3)$$

а при $\alpha = 0$

$$\pi_0(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - z\bar{z}_k} \bar{z}_k = \left(\prod_{k=1}^{\infty} |z_k| \right) \cdot B(z; z_k), \quad (4)$$

где $B(z; z_k)$ — функция Бляшке,



В предположении, что последовательность нулей $\{z_k\}_1^\infty$ имеет лишь одну предельную точку на окружности $|z| = 1$, мы будем исследовать асимптотические свойства функций типа $\pi_p(z; z_k)$ ($p \geq 0$) в окрестности той же граничной точки. В общих чертах следуя известному методу исследования асимптотических свойств целых функций ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾ в данной статье устанавливаются точные асимптотические формулы для $\pi_p(z; z_k)$ при довольно общих предположениях о плотности распределения нулей $\{z_k\}_1^\infty$.

Отметим, что функцию $\ln \pi_p(z; z_k)$ мы будем рассматривать в единичном круге, разрезанном вдоль отрезков, соединяющих все нули функции $\pi_p(z; z_k)$ с точкой $z = 1$.

2^o. Обозначая

$$A_p(z; z_k) = \left(1 - \frac{1 - |z_k|^2}{1 - z z_k} \right) \exp \left\{ \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \left(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - z z_k} \right)^n \right\} \quad (5)$$

из (3) получим

$$\pi_p(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_p(z; z_k) \quad (6)$$

Пусть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ ($|z_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1$) расположена на одном луче, а именно $z_k = 1 - r_k e^{-i\psi}$, причем

$$0 < r_{k+1} \leq r_k < 2 \cos \psi, \quad |\psi| < \frac{\pi}{2} - \eta \quad (\eta > 0). \quad (7)$$

Для любого t ($0 < t < 2 \cos \psi$) обозначим через $n(t)$ число точек $z_k = 1 - r_k e^{-i\psi}$, для которых $t < r_k < 2 \cos \psi$.

Приведем без доказательства две леммы.

Лемма 1. Пусть при некотором $\rho < p + 1$ ($p \geq 0$) и $c > 0$

$$n(t) < c \cdot t^{-\rho} \quad (0 < t < 2 \cos \psi). \quad (8)$$

Пусть далее $z = 1 - r e^{-i\varphi}$ ($\varphi \neq \psi$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $|\psi| < \frac{\pi}{2}$), $\sigma \in (0; \frac{1}{2})$ и

$$h_\sigma(z) = \prod_{0 < r_k < \sigma r} A_p(z; z_k). \quad (9)$$

Тогда при $0 < r < \min \{1, 2 \cos \varphi\}$

$$|\ln h_\sigma(1 - r e^{-i\varphi})| < C_p \sigma^{\rho+1-\rho} \cdot r^{-\rho}, \quad (10)$$

где постоянная C_p не зависит от r и σ .

Лемма 2. Пусть последовательность точек $z_k = 1 - r_k e^{-i\psi}$ ($|\psi| < \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2} \leq |z_k| < 1$) вновь удовлетворяет условию (8) и $\tau \geq 2$ — любое число.

Положим далее, что $z = 1 - r e^{-i\varphi}$ ($\varphi \neq \psi$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $0 < r < 2 \cos \varphi$)

произвольная точка, лежащая внутри единичного круга.

Тогда при $0 < r < \min \left\{ 2 \cos \varphi, \frac{2}{\tau} \cos \psi \right\}$ положив

$$H_{\tau}(z) = \prod_{r_k < r < 2 \cos \psi} A_p(z, z_k), \quad (11)$$

будем иметь

$$|\ln H_{\tau}(1 - re^{-i\varphi})| < C_p \tau^{-p} \cdot r^{-p} \quad (12)$$

где постоянная C_p' не зависит от r и τ .

Из лемм 1 и 2 очевидно следует

Лемма 3. Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\sigma > 0$ достаточно малым и $\tau \geq 2$ достаточно большим так, чтобы неравенства

$$|\ln h_{\tau}(1 - re^{-i\varphi})| < \varepsilon \cdot r^{-p}, \quad |\ln H_{\tau}(1 - re^{-i\varphi})| < \varepsilon \cdot r^{-p} \quad (13)$$

выполнялись для всех значений

$$0 < r < \min \left\{ 1, 2 \cos \varphi, \frac{2}{\tau} \cos \psi \right\}.$$

Причем $1 \leq p \leq \rho < p + 1$ или $p = 0, 0 < \rho < 1$.

На основании леммы 3 устанавливаются следующие теоремы об асимптотическом представлении функции $\pi_p(z; z_k)$ в специальном случае распределения ее нулей

Теорема 1. Пусть последовательность точек $\{z_k\}_1^{\infty}$ ($|z_k| < 1, k = 1, 2, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1$) лежит на луче $\arg(1 - z) = -\psi$ ($|\psi| < \frac{\pi}{2}$) и имеет плотность

$$\Delta = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-p} n(t), \quad (14)$$

где $\rho > 0$ некоторое нецелое число, причем $[\rho] = p \geq 0$. Тогда при $z = 1 - re^{-i\varphi}$ ($|z| < 1, \varphi \neq \psi, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^p \ln \pi_p(1 - re^{-i\varphi}; z_k) = \frac{\pi \cdot \Delta}{\sin \pi \rho} M(\varphi; \psi), \quad (15)$$

где

$$M(\varphi; \psi) = |\exp[i\rho(\varphi - \psi) - i\pi\rho \operatorname{sgn}(\varphi - \psi)] - e^{i\rho(\varphi + \psi) - 2\rho i\psi} \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{p-k+1} \binom{p-\rho}{k-1} (1 + e^{2i\psi})^{k-1}|. \quad (16)$$

Теорема 2. Если $\rho = p \geq 1$ целое число, а другие условия теоремы 1 остаются неизменными, то

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} r^p \ln \pi_p(1 - re^{-i\varphi}; z_k) = & -\Delta e^{i\rho(\varphi - \psi)} \{i[2\psi + \pi \operatorname{sgn}(\varphi - \psi)] + \\ & + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} (1 + e^{2i\psi})^k\}. \end{aligned} \quad (17)$$

3° В общем случае на последовательность $\{z_k\}_1^\infty (0 < |z_k| < 1, \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1)$ мы налагаем следующие условия:

а) Для данного целого $p \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{p+1} < +\infty.$$

б) Если $z_k = 1 - r_k e^{-i\psi_k}$, то $0 < r_{k+1} \leq r_k < 2 \cos \psi_k$ и $|\psi_k| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$ ($\eta > 0$) $k = 1, 2, \dots$ (18)

в) Для всех значений ψ ($|\psi| < \frac{\pi}{2} - \eta$), за исключением, быть может, счетного множества, существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\rho n(t) = \Delta(\psi) \quad (19)$$

при некотором ρ , причем $[\rho] = p \geq 0$. Здесь $n(t; \psi)$ — означает число точек $z_k = 1 - r_k e^{-i\psi_k}$, для которых

$$t < r_k < 2 \cos \psi_k, \quad -\frac{\pi}{2} + \eta < \psi_k < \psi.$$

г) Существует число $d > 0$ такое, что кружки радиусов

$$\rho_k = d(1 - |z_k|)^{1 + \frac{p}{2}} \quad (20)$$

с центрами в точках $\{z_k\}_1^\infty$ не пересекаются.

Множество точек этих кружков мы назовем S° — множеством.

Наряду с последовательностью $\{z_k\}_1^\infty$ введем в рассмотрение последовательность точек $\{z'_k\}_1^\infty$ ($|z'_k| < 1, \lim_{k \rightarrow \infty} z'_k = 1$), удовлетворяющих условиям

$$z'_k = 1 - r_k e^{-i\psi'_k}, \quad |\psi_k - \psi'_k| < t < \frac{\eta}{2} \quad (21)$$

и положим

$$f_\delta(z) = \prod_{|z_k - z| < \delta(1-r)} A_p(z; z_k); \quad F_\delta(z) = \prod_{|z_k - z| > \delta(1-r)} A_p(z; z_k); \quad (22)$$

$$f'_\delta(z) = \prod_{|z'_k - z| < \delta(1-r)} A_p(z; z'_k); \quad F'_\delta(z) = \prod_{|z'_k - z| > \delta(1-r)} A_p(z; z'_k),$$

где $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $|z| = r < 1$.

Для доказательства основного результата нами устанавливаются следующие две леммы.

Лемма 4. Пусть z ($|z| = r < 1$) не принадлежит S° — множеству. Тогда при $1 \leq p < p < p+1$ или $p=0$, $0 < \rho < 1$ для любого $\varepsilon > 0$ и при достаточно малом $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$|\ln f_\delta(z)| < \varepsilon \cdot (1-r)^{-p} \left(\frac{1}{2} < r < 1 \right). \quad (23)$$

Лемма 5. При $1 \leq p \leq \rho < p+1$ или $p=0$, $0 < \rho < 1$ для любого $\varepsilon < 0$ и для всех достаточно малых $t > 0$ имеет место неравенство

$$|\ln F_\rho(z) - \ln F_\rho^t(z)| < \varepsilon(1-r)^{-p} \quad \left(|z|=r < \frac{1}{2}\right). \quad (24)$$

4°. Докажем теперь теорему об асимптотическом представлении функции $\pi_p(z; z_k)$ в общем случае распределения ее нулей.

Теорема 3. Пусть последовательность точек $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям а), б), в) и г). Тогда при $z=1-re^{-i\varphi}$ ($|z| < 1$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$), не принадлежащем S° -множеству, для функции $\pi_p(z; z_k)$ ($0 \leq p < \rho < p+1$) справедливо предельное соотношение притом равномерно по $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^\rho \ln \pi_p(1-re^{-i\varphi}; z_k) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \int_{-\frac{\pi}{2} + \eta}^{\frac{\pi}{2} - \eta} M(\varphi; \psi) d\Delta(\psi), \quad (25)$$

где $M(\varphi; \psi)$ — функция (16).

Доказательство. Произведем разбиение отрезка $\left[-\frac{\pi}{2} + \eta; \frac{\pi}{2} - \eta\right]$ точками $\{\vartheta_j\}_0^n$ таким образом, чтобы

$$-\frac{\pi}{2} + \eta = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \dots < \vartheta_n = \frac{\pi}{2} - \eta,$$

и при достаточно малом $t > 0$ имели

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\vartheta_j - \vartheta_{j-1}| = t$$

Любую из точек $z_k = 1 - r_k e^{-i\psi_k}$ ($k=1, 2, \dots$) заменим соответственно точкой $z'_k = 1 - r_k e^{-i\vartheta_j}$ положив, что при данном k ϑ_j ($0 \leq j \leq n$) определяется из условия $\vartheta_j \leq \psi_k < \vartheta_{j+1}$.

Наконец, определим функцию

$$\pi_p^t(z; z'_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_p(z; z'_k). \quad (26)$$

Заметив, что в силу определений (22)

$$\pi_p(z; z_k) = f_\rho^t(z) \cdot F_\rho(z), \quad \pi_p^t(z; z'_k) = f_\rho^t(z) \cdot F_\rho^t(z),$$

будем иметь

$$|\ln \pi_p(z; z_k) - \ln \pi_p^t(z; z'_k)| \leq |\ln f_\rho(z)| + |\ln f_\rho^t(z)| + |\ln F_\rho(z) - \ln F_\rho^t(z)|. \quad (27)$$

Применяя лемму 4 к функциям $f_\rho(z)$ и $f_\rho^t(z)$, и учитывая также лемму 5, из (27) получим, что для любого $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно малых $t > 0$ имеет место неравенство

$$|\ln \pi_p(1-re^{-i\varphi}; z_k) - \ln \pi_p'(1-re^{-i\varphi}; z'_k)| < \frac{\varepsilon}{2} r^{-\rho} \quad (28)$$

при всех $z=1-re^{-i\varphi}$ ($|z| < 1$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$) не принадлежащих C° -множеству.

Далее обозначим через $G_j'(z; z'_k)$ произведение тех множителей из $\pi_p'(z; z'_k)$, для которых точки z'_k расположены на луче $\arg(1-z) = -\vartheta_j$ ($0 \leq j \leq n-1$). Очевидно, что

$$\pi_p'(z; z'_k) = \prod_{j=0}^{n-1} G_j'(z; z'_k). \quad (29)$$

Обозначая

$$S_n(\varphi) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \sum_{j=0}^{n-1} M(\varphi; \vartheta_j) [\Delta(\vartheta_{j+1}) - \Delta(\vartheta_j)], \quad (30)$$

и применяя теорему 1 к каждой функции $G_j(z; z'_k)$ (что, очевидно, допустимо) из (29) получим, что существует число $r(\varepsilon) > 0$ и $\eta_1 > 0$ так, что при $0 < r < r(\varepsilon)$, $|\varphi - \vartheta_j| \geq \eta_1$

$$|r^{-\rho} \ln \pi_p'(1-re^{-i\varphi}; z'_k) - S_n(\varphi)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (31)$$

Отсюда и из (28) следует, что если $z=1-re^{-i\varphi} \notin C^\circ$, то при $0 < r < r(\varepsilon)$

$$|r^{-\rho} \ln \pi_p(1-re^{-i\varphi}; z_k) - S_n(\varphi)| < \varepsilon \quad (32)$$

причем равномерно по φ при $|\varphi - \vartheta_j| \geq \eta_1$.

Произведем второе разбиение отрезка $\left[-\frac{\pi}{2} + \eta; \frac{\pi}{2} - \eta \right]$ точками $\{\vartheta'_j\}_0^n$, $\max_{1 \leq j < n} |\vartheta'_j - \vartheta'_{j-1}| = t$ и выберем число $\eta_1 > 0$ так, чтобы множества $|\varphi - \vartheta'_j| \geq \eta_1$ и $|\varphi - \vartheta'_j| \geq \eta_1$ перекрывали весь отрезок $\left[-\frac{\pi}{2} + \eta; \frac{\pi}{2} - \eta \right]$,

Тогда неравенство (32) имеет место при $0 < r < r(\varepsilon)$, вне C° -множества, равномерно по φ при $|\varphi - \vartheta'_j| \geq \eta_1$. В силу того, что множества $|\varphi - \vartheta'_j| \geq \eta_1$ и $|\varphi - \vartheta'_j| \geq \eta_1$ ($0 \leq j \leq n$) покрывают весь отрезок $\left[-\frac{\pi}{2} + \eta; \frac{\pi}{2} - \eta \right]$, то неравенство (32) имеет место равномерно по $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} + \eta; \frac{\pi}{2} - \eta \right]$ при $z=1-re^{-i\varphi} \notin C^\circ$.

Наконец, поскольку

$$\lim_{t \rightarrow 0} S_n(\varphi) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \int_{-\frac{\pi}{2} + \eta}^{\frac{\pi}{2} - \eta} M(\varphi, \vartheta) d\Delta(\vartheta),$$

то из (32) следует утверждение теоремы:

Вполне аналогично, на основании теоремы 2 доказывается

Теорема 4. Если $\rho = p \geq 1$ целое число, а другие условия теоремы 3 остаются неизменными, то вне C^σ -множества

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^\rho \ln \pi_p(1 - re^{-i\varphi}; z_k) = \int_{-\frac{\pi}{2} + \eta}^{\frac{\pi}{2} - \eta} e^{i\rho(\varphi - \psi)} [i[2\psi + \pi \operatorname{sgn}(\varphi - \psi)] + \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} (1 + e^{2i\psi})^n] d\Delta(\psi). \quad (33)$$

Из теоремы 3 вытекает также Следствие. Функция Бляшке

$$B(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z |z_k|}{1 - z \bar{z}_k z_k}$$

в условиях теоремы 3, налагаемых на последовательность $\{z_k\}_1^\infty$, вне C^σ -множества удовлетворяет равенству

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^\rho \ln \pi_p(1 - re^{-i\varphi}; z_k) = \frac{\pi e^{i\rho\varphi}}{\sin \pi\rho} \int_{-\frac{\pi}{2} + \eta}^{\frac{\pi}{2} - \eta} [e^{-i\rho[\psi + \pi \operatorname{sgn}(\varphi - \psi)]} - e^{i\rho\psi}] d\Delta(\psi). \quad (34)$$

Это утверждение следует из (4), (25) и (16).

В заключение автор выражает глубокую признательность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Ռ. Ս. ԳԱԼՈՅԱՆ

$\pi_p(z; z_k)$ ֆունկցիայի ասիմպտոտական հատկությունների մասին

Հոդվածում ուսումնասիրված են W , W Ջրբաշյանի կողմից ներմուծված $(2) \pi_p(z; z_k)$ անվերջ արտադրյալի ասիմպտոտական հատկությունները: Այդ ֆունկցիայի դրոնների $\{z_k\}_1^\infty$ ($|z_k| < 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1$) հաջորդականության բաշխման խտության վրա դրված որոշ սահմանափակումների դեպքում ստացված են ճշգրիտ ասիմպտոտական բանաձևեր $\ln \pi_p(z; z_k)$ ֆունկցիայի համար, երբ $z \rightarrow 1$:

ЛИТЕРАТУРА — Պ Բ Ա Կ Ա Ն Ս Ի Ք Յ Ս Ի Ն

¹ P. Nevanlinna, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, 1941. ² М. М. Джрбашян, ДАН Арм. ССР, т. 3, № 1 (1945). ³ М. М. Джрбашян, Сообщ. инст. матем. и мех. АН Арм. ССР, 2, 1948. ⁴ Б. Я. Левин, Мат. сб. 2(44) : 6 (1937), 1057—1142.