ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LX 1975 1

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Г. В. Вирабян

О кратной полноте собственных элементов для одного класса краевых задач, мероморфно зависящих от параметра

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 21/V 1974)

В данной работе устанавливается теорема об n—кратной полноте системы собственных элементов для следующей краевой задачи на собственные значения, мероморфно зависящей от параметра λ:

$$Lu+\lambda Mu+\lambda^2 Nu+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\lambda^2}{\lambda-a_k}L_k u=0, \tag{1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=\ldots=\frac{\partial^{\nu-1}u}{\partial n^{\nu-1}}\Big|_{\partial\Omega}=0. \tag{2}$$

Здесь L, M, N, $L_k\,(k=1,2,\ldots,n-2)$—однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядка 2ν, $\partial\Omega$—граница m—мерного эллипсоида Ω, в котором рассматривается краевая задача (1), (2), $a_k\,(k=1,2,\ldots,n-2)$—действительные числа, λ—комплексный параметр.

Краевая задача (1), (2) в случае $n=2$ рассмотрена нами в работе ([1]).

Пусть $\mathring{R}(\Omega)$ означает множество всех полиномов от переменных $x_1,\ldots,x_m$, удовлетворяющих граничным условиям (2). Относительно дифференциальных операторов L, M, N, L_k предполагается

$$\text{(I)}\qquad (-1)^{\nu}\int_{\Omega} p\cdot Lp\,d\Omega>0,\qquad 0\neq p\in\mathring{R}(\Omega).$$

$$\text{(II)}\qquad (-1)^{\nu}\int_{\Omega} p\cdot Np\,d\Omega<0,\qquad 0\neq p\in\mathring{R}(\Omega).$$

$$\text{(III)}\qquad \frac{(-1)^{\nu}}{a_k}\cdot\int_{\Omega} p\cdot L_k p\,d\Omega>0\qquad 0\neq p\in\mathring{R}(\Omega).$$

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы о кратной полноте.

Теорема. *При выполнении условий* (I)–(III) $\exists$ *система полиномиальных собственных функций краевой задачи* (1), (2), *которая n-кратно полна в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega)$.

Доказательству этой теоремы предпошлем некоторые вспомогательные построения и леммы.

Обозначим через $R(\Omega)$ пространство всех полиномов от переменных $x_1,\ldots,x_m$. Нетрудно заметить, как это следует из условия (1), что отображение $L:\overset{\circ}{R}(\Omega)\to R(\Omega)$ является изоморфизмом и поэтому существует обратный оператор L^{-1}, отображающий $R(\Omega)$ на $\overset{\circ}{R}(\Omega)$. Применяя с обеих сторон уравнения (1) оператор L^{-1}, обратный к оператору L, перепишем краевую задачу (1), (2) в виде операторного пучка в пространстве $\overset{\circ}{R}(\Omega)$

$$Eu-\lambda Au-\lambda^2 Bu+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\lambda^2}{\lambda-a_k}C_k u=0, \tag{3}$$

$$u\in\overset{\circ}{R}(\Omega), \tag{4}$$

где $A=-L^{-1}M$, $B=-L^{-1}N$, $C_k=L^{-1}L_k$, $(k=1,2,\ldots,n-2)$.

Через $\overset{\circ}{R}_s(\Omega)$ обозначим пространство полиномов из $\overset{\circ}{R}(\Omega)$, степень которых не превышает n.

Тогда $\overset{\circ}{R}(\Omega)=\bigcup\limits_{s=2\nu}^{\infty}\overset{\circ}{R}_s(\Omega)$. Скалярное произведение в $\overset{\circ}{R}_s(\Omega)$ зададим формулой

$$(p,q)=(-1)^{\nu}\int\limits_{\Omega}Lp\cdot q\,d\Omega, \tag{*}$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Операторы* A, B, C_k $(k=1,2,\ldots,n-2)$ *для любого числа* $s>2\nu$ *отображают пространство* $\overset{\circ}{R}_s(\Omega)$ *в себя и являются симметрическими относительно скалярного произведения* (*), *причем операторы* B, $1/a_k\, C_k$ $(k=1,2,\ldots,n-2)$ *положительно определенные.*

Рассмотрим гильбертову сумму n экземпляров пространств $\overset{\circ}{R}_s(\Omega)$

$$\overset{\circ}{H}_s(\Omega)=\overset{\circ}{R}_s(\Omega)\oplus\cdots\oplus\overset{\circ}{R}_s(\Omega).$$

Скалярное произведение элементов $\hat{p}=(p,p',p_1,\ldots,p_{n-2})$ и $\hat{q}=(q,q',q_1,\ldots,q_{n-2})$ из $\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ имеет вид

$$[\hat{p},\hat{q}]=(p,q)+(p',q')+\sum_{k=1}^{n-2}(p_k,q_k). \tag{*,*}$$

В конечномерном пространстве $\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ рассмотрим оператор Π, заданный с помощью операторной матрицы, возникающей при линеаризации пучка (3) [2].

$$
\Pi=\begin{vmatrix}
A & B & \frac{1}{a_1}C_1 & \dots & \frac{1}{a_i}C_i & \dots & \frac{1}{a_{n-2}}C_{n-2}\\
E & O & O & \dots & O & \dots & O\\
E & O & \frac{1}{a_1}E & \dots & O & \dots & O\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
E & O & O & \dots & \frac{1}{a_i}E & \dots & O\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
E & O & O & \dots & O & \dots & \frac{1}{a_{n-2}}E
\end{vmatrix}
$$

В силу леммы 1 оператор Π отображает пространство $\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ в себя.

Лемма 2. *Если $\hat{p}=(p,p',p_1,\dots,p_{n-2})\in\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ собственный вектор оператора Π, соответствующий собственному значению λ, то первая компонента $p\in\overset{\circ}{R}_s(\Omega)$ является собственным элементом пучка* (3) *с собственным значением $\mu=1/\lambda$, и наоборот, если $p\in\overset{\circ}{R}_s(\Omega)$ есть собственный элемент пучка* (3) *с собственным значением λ, то вектор $\hat{p}=\left(p,\frac{1}{\lambda}p,\frac{a_1}{\lambda a_1-1}p,\dots,\frac{a_{n-2}}{\lambda a_{n-2}-1}p\right)\in\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ будет собственным вектором оператора Π, соответствующим собственному значению $\mu=1/\lambda$.*

Доказательство. Пусть $\hat{p}=(p,p',p_1,\dots,p_{n-2})\neq 0$ и $\Pi\hat{p}=\lambda\hat{p}$.

$$
\left|\begin{array}{ll}
Ap+Bp'+\frac{1}{a_1}C_1p_1+\dots+\frac{1}{a_{n-2}}C_{n-2}p_{n-2} & =\lambda p,\\
p & =\lambda p',\\
p+\frac{1}{a_1}p_1 & =\lambda p_1,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
p+\frac{1}{a_{n-2}}p_{n-2} & =\lambda p_{n-2}
\end{array}\right.
$$

Отсюда имеем

$$
Ap+\frac{1}{\lambda}Bp+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\lambda a_k-1}C_kp=\lambda p,
$$

или, что то же самое

$$
Ep-\mu Ap-\mu^2Bp+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\mu^2}{\mu-a_k}C_kp=0,\quad p\neq 0,\quad \mu=\frac{1}{\lambda}.
$$

Обратно, пусть $p\neq 0\in\overset{\circ}{R}_s(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (3). Тогда непосредственно проверяется, что вектор

$$\hat{p}=(p, \frac{1}{\lambda}p, \frac{a_1}{\lambda a_1-1}p, \ldots, \frac{a_{n-2}}{\lambda a_{n-2}-1}p)$$

является собственным для оператора Π в $\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ с собственным значением $\mu=1/\lambda$. Лемма доказана.

В пространстве $\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ рассмотрим оператор G, заданный с помощью операторной матрицы

$$G=\begin{vmatrix} E & O & O & \ldots & O \\ O & B & O & \ldots & O \\ O & O & \frac{1}{a_1}C_1 & \ldots & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & O & O & \ldots & \frac{1}{a_{n-2}}C_{n-2} \end{vmatrix}$$

Лемма 3. *Оператор—матрица G есть симметрический, положительно определенный оператор относительно скалярного произведения* (*, *).

Доказательство. В самом деле, в силу леммы 1 для произвольных двух векторов $\hat{p}=(p, p', p_1, \ldots, p_{n-2})$ и $\hat{q}=(q, q', q_1, \ldots, q_{n-2})$ из пространства $\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ имеем

$$[G\hat{p}, \hat{q}] = (p,q)+(Bp',q') + \left(\frac{1}{a_1} C_1 p_1, q_1\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} p_{n-2}, q_{n-2}\right)=$$

$$= (p,q)+(p', Bq') + \left(p_1, \frac{1}{a_1} C_1 q_1\right)+\ldots+\left(p_{n-2}, \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} q_{n-2}\right)=$$

$$= [\hat{p}, G\hat{q}].$$

Положительная определенность оператора G в $\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ следует из положительной определенности операторов B, $1/a_k\, C_k$ $(k=1, 2, \ldots, n-2)$ в $\overset{\circ}{R}_s(\Omega)$. В самом деле,

$$[G\hat{p},\hat{p}]=(p,p)+(Bp',p')+\left(\frac{1}{a_1} C_1 p_1, p_1\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} p_{n-2}, p_{n-2}\right)\geqslant 0$$

для любого вектора $\hat{p}\in \overset{\circ}{H}_s(\Omega)$, а из $[G\hat{p},\hat{p}]=0$ следует $p=p'=p_1=$ $=\ldots=p_{n-2}=0$, т. е. $\hat{p}=0$. Лемма доказана.

В пространстве $\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$, наряду со скалярным произведением (*,*), рассмотрим новое скалярное произведение

$$<\hat{p}, \hat{q}> = [G\hat{p}, \hat{q}], \quad \hat{p}, \hat{q}\in \overset{\circ}{H}_s(\Omega). \qquad (*,*,*)$$

Лемма 4. *Оператор—матрица Π является симметрическим в пространстве $\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ $(s\geqslant 2\nu)$ относительно скалярного произведения* (*, *, *).

Доказательство. Действительно, для любых двух векторов $\hat{p}=(p, p', p_1, \ldots, p_{n-2})$ и $\hat{q}=(q, q', q_1, \ldots, q_{n-2})$ из пространства $\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ имеем

$$< \Pi \hat{p}, \hat{q} > = [G \Pi \hat{p}, \hat{q}] = [\Pi \hat{p}, G\hat{q}] = (Ap + Bp' + \frac{1}{a_1} C_1 p_1 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} p_{n-2}, q) + (p, Bq') + (p + \frac{1}{a_1} p_1, \frac{1}{a_1} C_1 q_1) + \ldots + (p +$$

$$+ \frac{1}{a_{n-2}} p_{n-2}, \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} q_{n-2}) = (p, Aq + Bq' + \frac{1}{a_1} C_1 q + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} q_{n-2}) + (Bp', q) + \left(\frac{1}{a_1} C_1 p_1, q + \frac{1}{a_1} q_1\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} p_{n-2}, q + \frac{1}{a_{n-2}} q_{n-2}\right) = [G\hat{p}, \Pi \hat{q}] = < \hat{p}, \Pi \hat{q} >.$$

Здесь мы использовали леммы 1 и 3.

Аналогично определению n—кратной полноты, данному М. В. Келдышем ([4]) для полиномиальных пучков, вводим следующее.

Определение. Мы скажем, совокупность собственных функций $\{\varphi\}$ с собственными значениями $\{\lambda\}$ пучка (3) образует n—кратно полную систему в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{(s)}(\Omega)$, если система вектор-функций $\left\{\hat{\varphi} = \left(\varphi, \frac{1}{\lambda}\varphi, \frac{a_1}{\lambda a_1 - 1}\varphi, \ldots, \frac{a_{n-2}}{\lambda a_{n-2} - 1}\varphi\right)\right\}$ полна в гильбертовой сумме n экземпляров пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^{(s)}(\Omega) \oplus \ldots \oplus \overset{\circ}{W}{}_2^{(s)}(\Omega)$.

Доказательство теоремы. Из леммы 4 следует, что оператор Π в пространстве $\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ для любого $s \geqslant 2$, имеет полную систему собственных векторов. Следовательно, объединение всех этих систем собственных векторов будет полной в $\overset{\circ}{H}(\Omega) = \bigcup\limits_{s=2}^{\infty} \overset{\circ}{H}_s(\Omega)$. Замыкание $\overset{\circ}{H}(\Omega)$ в метрике этого пространства совпадает с $H(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}_2^{(s)}(\Omega) \oplus \ldots \oplus \overset{\circ}{W}{}_2^{(s)}(\Omega)$, поскольку, как это показано в ([3]), замыкание $\overset{\circ}{R}(\Omega)$ совпадает с $\overset{\circ}{W}{}_2^{(s)}(\Omega)$. Поэтому у оператора Π имеется полная система собственных векторов в $H(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}_2^{(s)}(\Omega) \oplus \ldots \oplus \overset{\circ}{W}{}_2^{(s)}(\Omega)$. А это в силу леммы 3 означает, что первые компоненты собственных векторов оператора Π образуют n—кратно полную систему полиномиальных собственных элементов операторного пучка (3) и следовательно краевой задачи (1), (2) в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{(s)}(\Omega)$. Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ

Պարամետրից մերոմորֆ կախված եզրային խնդրի սեփական էլեմենտների բազմապատիկ լրիվության մասին

Աշխատանքում սեփական արժեքների վերաբերյալ եզրային խնդիրների հետևյալ դասի համար

$$Lu+\lambda Mu+\lambda^2 Nu+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\lambda^2}{\lambda-a_k}L_k u=0, \qquad (1)$$

$$u\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=\ldots=\frac{\partial u}{\partial n^{\nu-1}}\Big|_{\partial\Omega}=0, \qquad (2)$$

որտեղ L, M, N, L_k $(k=1, 2,\ldots,n-2)$ *հաստատուն գործակիցներով* 2ν *կարգի դիֆերենցիալ օպերատորներ են, ապացուցված է սեփական ֆունկցիաների* n*—ապատիկ լրիվության վերաբերյալ թեորեմ։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. В. Вирабян*, ДАН Арм. ССР, т. XLIII, №1 (1966). [2] *P. H. Müller* Mathematische Zeitschrift, 70 Band 5, 1959. [3] *Г. В. Вирабян*, ДАН Арм. ССР, т. XLVIII, №2 (1969). [4] *М. Г. Крейн, Г. К. Лангер*, Труды межд. симп. по прим. т. ф. к. п. в механике сплошной среды, Изд. „Наука", 1965.