ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LX 1975 2

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Талалян

О переносах множеств в локально компактных группах

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 28/X 1974)

В работах [1,2] рассматриваются различные частные постановки следующей задачи:

Пусть локально компактная группа G действует в локально компактном пространстве X, причем на X задана положительная борелевская мера μ. Пусть $E\subset X$—множество положительной меры и $A\subset X$—конечное множество. Спрашивается существует ли элемент $g\in G$ такой, что $g(A)\subset E$ и какова мера Хаара множества $\{g\in G\colon g(A)\subset E\}$.

В настоящей заметке рассматривается случай, когда $X=G$ и G действует в X слева, т. е. $g(x)=gx$, $g\in G$, $x\in X=G$. Приведенная ниже теорема является обобщением одного результата Г. Хадвигера, относящегося к тому случаю, когда G есть евклидово пространство произвольной конечной размерности.

Теорема 1. *Пусть G—локально компактная группа, μ—левая мера Хаара группы G и $E\subset G$—измеримое множество конечной положительной меры. Тогда для любого $\varepsilon>0$ и целого $n>1$ существует такая окрестность V единицы группы G, что для любого множества $A\subset V$ состоящего из n точек $\mu\{g\in G: gA\subset E\}>(1-\varepsilon)\mu(E)$.*

Доказательство. Возьмем компактное множество K и открытое множество W, удовлетворяющие условиям

$$K\subset E\subset W, \tag{1}$$

$$\mu(K)>(1-\varepsilon/2)\mu(E), \tag{2}$$

$$\mu(W)<(1+\varepsilon/4n)\mu(K). \tag{3}$$

Далее возьмем симметрическую окрестность единицы V такую, чтобы выполнялись условия

$$KV\subset W, \tag{4}$$

$$\Delta(g)>1-\varepsilon/4n,\ g\in V, \tag{5}$$

где Δ—модулярная функция группы G.

Покажем, что построенная окрестность V является искомой.

Пусть $A\subset V$, $A=\{g_1,\ldots,g_n\}$. Тогда мы имеем

$$\{g \in G : g A \subset E\} = \bigcap_{i=1}^{n} E g_i^{-1} \tag{6}$$

Так как при любом $i=1,2,\ldots,n$ $g_i^{-1} \in V$, то применяя последовательно (6), (1), (4), (3), (5) и (2) получим

$$\mu\{g \in G : gA \subset E\} = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} E g_i^{-1}\right) \geqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} K g_i^{-1}\right) = \mu\left(W \setminus \bigcap_{i=1}^{n} (W \setminus K g_i^{-1})\right) =$$

$$= \mu(W) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} (W \setminus K g_i^{-1})\right) > \mu(W) - \sum_{i=1}^{n} \mu(W \setminus K g_i^{-1}) = -(n-1)\mu(W) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \mu(K g_i^{-1}) = -(n-1)\mu(W) + \sum_{i=1}^{n} \Delta(g_i^{-1})\mu(K) >$$

$$> -(n-1)(1+\varepsilon/4n)\mu(k) + n(1-\varepsilon/4n)\mu(K) > (1-\varepsilon/2)\mu(K) >$$

$$> (1-\varepsilon/2)^2 \mu(E) > (1-\varepsilon)\mu(E),$$

что и требовалось.

Следующее известное утверждение является простым следствием теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть G—локально компактная группа и $E \subset G$—борелевское множество, мера Хаара которого положительна и конечна. Тогда множество $E^{-1}E$ содержит окрестность единицы.*

Доказательство. Применяя теорему при $n=2$, мы найдем симметрическую окрестность единицы V такую, что для любых двух точек x и y из V существует такой элемент $g \in G$, что $gx, gy \in E$. Докажем, что $E^{-1}E \supset V$. Пусть $z \in V$—произвольная точка. Для z^{-1} и e (e—единица группы) найдется $g \in G$ такой, что $gz^{-1} \in E$ и $ge = g \in E$. Тогда $z = (gz^{-1})^{-1} g \in E^{-1}E$.

Замечание. В теореме 1 нельзя вообще говоря утверждать существование окрестности V пригодной для всех n, даже в том случае когда ε не фиксируется заранее. Более того, например, в группе R—аддитивной группе действительных чисел существует множество положительной меры E, такое, что в любой окрестности нуля существует конечное множество, которое не отображается в E никаким переносом. Это видно из следующего простого примера.

Пусть $n > 2$—целое число. Разделим отрезок $[0,1]$ на n равных частей и выбросим последнюю часть. Каждый из оставшихся $n-1 = l(1)$ отрезков разделим на $l(1) \cdot n^2$ равных частей и выбросим последнюю часть. Пусть $l(k)$—число отрезков, полученных после k шагов. Каждый из этих отрезков разделим на $l(k)n^{k+1}$ равных частей и выбросим последнюю часть. Продолжая этот процесс неограниченно мы выбросим из $[0,1]$ последовательность непересекающихся отрезков S_n, сумма длин которых равна

$$\frac{1}{n} + l(1) \cdot \frac{1}{l(1)n^2} + \ldots + l(k) \cdot \frac{1}{l(k)n^{k+1}} + \ldots = \frac{1}{n-1} < 1.$$

Положим $E=[0,1]\setminus US_n$. Таким образом E имеет положительную лебегову меру.

Пусть задан произвольный интервал $(0,\delta)$, $\delta>0$. Выберем k настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $1/l(k-1)n^k<\delta$. Теперь разделим отрезок $[0,1/l(k-1)n^k]$ на $2l(k)n^{k+1}$ равных частей и пусть A есть множество точек деления. Очевидно при любом действительном t множество $(t+A)\cap(R\setminus E)$ не пусто.

В связи с этим возникает вопрос: в каких группах существуют множества нулевой меры Хаара, для которых существует окрестность, указанная в приведенном выше замечании?

Из одного результата Марстранда ([3], теорема 1) следует, что в любой недискретной локально компактной σ—компактной группе существует множество нулевой меры Хаара, в которое некоторым переносом можно отобразить любое счетное множество. После некоторых, связанных с существом дела изменений, рассуждения указанной работы ([3]) позволяют доказать несколько более общее утверждение.

Теорема 2. *Пусть G—недискретная локально компактная группа, μ—левая мера Хаара на G и V—окрестность единицы с σ—компактным замыканием. Тогда существует множество $E\subseteq G$ с $\mu(E)=0$ такое, что для любого счетного множества $A\subseteq V$ существует элемент $g\in G$ такой, что $gA\subseteq E$.*

Доказательство. Можно считать окрестность V симметрической. В силу σ—компактности $\overline{V}$ можно найти последовательность U_n окрестностей единицы с компактными замыканиями такую, что

$$U_n\subseteq U_{n+1},\quad n=1,2,\ldots;\qquad V\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n=U.$$

Все окрестности единицы, встречающиеся в приведенном ниже построении предполагаются симметрическими и с компактными замыканиями. Они будут обозначены буквами V и W с индексами.

Индукцией по n построим последовательности W_n и V_n, и последовательность конечных множеств $T_n\subseteq G$, так, чтобы при любом $n\geq 1$ выполнялись условия:

a) $\overline{V}_{n+1}\subseteq V_n$;

b) $\mu(\overline{V}_nT_n)<\dfrac{1}{n}$;

c) для любого $x\in\overline{V}_n\overline{W}_nT_n$ существует $t\in T_{n+1}$ такое, что $\overline{V}_{n+1}t\subseteq V_nx$;

d) $\overline{V}_nT_nU^2\subseteq \bigcup_{r=1}^{\infty} W_rT_r=W$.

Это можно сделать следующим образом.

Пусть W_1—произвольная окрестность единицы и T_1—произвольное конечное множество. Возьмем открытое множество O_1 такое, что

$T_1 \subset O_1$ и $\mu(O_1) < 1$. После этого выберем окрестность V_1 так, чтобы $\overline{V}_1 \subset W_1$ и $\overline{V}_1 T_1 \subset O_1$.

Пусть W_n, V_n и T_n построены. Возьмем последовательно W_{n+1}, T_{n+1}, O_{n+1} и V_{n+1} так, чтобы выполнялись условия:

$$W_n^2 \subset V_n; \tag{7}$$

$$T_{n+1} \supset T_n, \quad \overline{V}_n \overline{W}_n T_n U_n^2 \subset W_{n+1} T_{n+1}; \tag{8}$$

$$O_{n+1} \supset T_{n+1}, \quad \mu(O_{n+1}) < \frac{1}{n+1}; \tag{9}$$

$$\overline{V}_{n+1} \subset W_{n+1}, \quad \overline{V}_{n+1} T_{n+1} \subset O_{n+1}. \tag{10}$$

Продолжая этот процесс неограниченно мы построим последовательности W_n, V_n и T_n, удовлетворяющие условиям (7)—(10). Проверим выполнение условий a)—d). a) следует из (10) и (7). b) следует из (10) и (9), d) следует из (8). Докажем c). Пусть $x \in \overline{V}_n \overline{W}_n T_n$. Тогда в силу (8) $x \in W_{n+1} T_{n+1}$, откуда $t = w^{-1}x$, где $w \in W_{n+1}$, $t \in T_{n+1}$. Далее в силу (10) и (7) получаем

$$\overline{V}_{n+1} t = \overline{V}_{n+1} w^{-1} x \subset W_{n+1} w^{-1} x \subset W_{n+1}^2 x \subset V_n x$$

и условие d) доказано.

Положим

$$F_1 = W, \quad F_{n+1} = \overline{V}_{n+1} T_{n+1} \cup (W \setminus W_n T_n)$$

$$M_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{2^k 3^i}$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i .$$

Для построенного множества E справедливо утверждение теоремы 2. Это доказывается повторением рассуждений работы [3]. Новым здесь является только условие d), которое нужно будет использовать в соответствующем месте.

Сначала докажем равенство $\mu(E) = 0$. Так как $E \subset W$, то

$$E = (\bigcup_i M_i) \cap W = \bigcup_{i,m} (M_i \cap W_m T_m)$$

и достаточно доказать, что при любых i и m $\mu(M_i \cap W_m T_m) = 0$. Возьмем k настолько большим, чтобы $2^k > m$ и положим $p = 2^k 3^i$. Тогда

$$M_i \cap W_m T_m \subset F_p \cap W_{p-1} T_{p-1} \subset \overline{V}_p T_p$$

откуда

$$\mu(M_i \cap W_m T_m) \leq \mu(\overline{V}_p T_p) < \frac{1}{p} < \frac{1}{2^k}.$$

Так как число k можно взять сколь угодно большим, то из последнего неравенства следует $\mu(M_i \cap W_m T_m) = 0$.

Теперь докажем, что для любого счетного множества $A \subset V$ существует элемент $g \in G$ такой, что $gA \subset E$. Пусть $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Если взять $g \in \bigcap E x_i^{-1}$, то будем иметь $g x_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots$ и, следовательно достаточно доказать, что множество $\bigcap E x_i^{-1}$ не пусто. А так как $V^{-1} = V$ и

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E x_i^{-1} \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i\, x_i^{-1} = \bigcap_{i,k=1}^{\infty} F_{2^k 3^i} x_i^{-1},$$

то теорема будет доказана, если мы докажем следующее:

Для любой последовательности точек $z_r \in V$ множество $\bigcap F_r z_r$ не пусто.

Для этого мы построим последовательность точек вида $t_r y_r$, $t_r \in T_r$, $y_r \in V$, $r = 1, 2, \ldots$, так, чтобы при любом r выполнялись условия:

$$F_r z_r \supset \overline{V}_r t_r y_r,$$

$$\overline{V}_r t_r y_r \supset \overline{V}_{r+1} t_{r+1} y_{r+1}.$$

Тогда, в силу того, что множества $\overline{V}_r t_r y_r$ компактны и образуют убывающую последовательность, будем иметь

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} F_r z_r \supset \bigcap_{r=1}^{\infty} \overline{V}_r t_r y_r \neq \varnothing.$$

Перейдем к построению последовательности $t_r y_r$. Пусть t_1 — произвольная точка из T_1 и $y_1 = z_1$. Тогда $F_1 z_1 \supset \overline{V}_1 T_1 z_1 \supset \overline{V}_1 t_1 y_1$. Пусть найдены точки $t_1, \ldots, t_r$ и $y_1, \ldots, y_r$. Если $\overline{V}_r t_r y_r \subset (W \setminus W_r T_r) z_{r+1}$, то $\overline{V}_r t_r y_r \subset F_r z_{r+1}$ и можно взять $t_{r+1} = t_r$, $y_{r+1} = y_r$. В противном случае, если учесть, что в силу d) $\overline{V}_r t_r y_r \subset W z_{r+1}$, будем иметь $\overline{V}_r t_r y_r \cap W_r T_r z_{r+1} \neq \varnothing$ и следовательно $t_r y_r z_{r+1}^{-1} \in \overline{V}_r \overline{W}_r T_r$. Тогда, в силу c) существует точка $t_{r+1} \in T_{r+1}$ такая, что

$$\overline{V}_{r+1} t_{r+1} \subset V_r t_r y_r z_{r+1}^{-1}$$

или

$$\overline{V}_{r+1} t_{r+1} z_{r+1} \subset V_r t_r y_r.$$

Полагая $y_{r+1} = z_{r+1}$ будем иметь

$$\overline{V_{r+1} t_{r+1} y_{r+1}} \subset \overline{V}_{r+1} T_{r+1} y_{r+1} = \overline{V}_{r+1} T_{r+1} z_{r+1} \subset F_{r+1} z_{r+1}.$$

Продолжая этот процесс неограниченно мы построим требуемую последовательность $t_r y_r$. Теорема 2 доказана.

Так как связная группа порождается произвольной окрестностью единицы, то из теоремы 2, такими же рассуждениями как при доказательстве следствия 1 можно вывести

Следствие 2. *Любая связная локально-компактная группа порождается некоторым своим подмножеством нулевой хааровой меры.*

Ереванский государственный университет

Ֆ. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Լոկալ կոմպակտ խմբերի մեջ բազմությունների տեղաշարժերի մասին

Ապացուցված են հետևյալ թեորեմները՝

Թեորեմ 1. Թող G-ն լոկալ կոմպակտ խումբ է, μ-ն G-ի Հաարի չափը և E-ն դրական չափի բազմություն: Այդ դեպքում կամայական ε դրական և $n>1$ բնական թվերի համար, գոյություն ունի միավորի V շրջակայք այնպիսին, որ ցանկացած n էլեմենտանոց $A\subset V$ բազմության համար

$$\mu\{g\in G: gA\subset E\}>(1-\varepsilon)\mu(E):$$

Թեորեմ 2. Թող G-ն ոչ դիսկրետ լոկալ կոմպակտ խումբ է, μ-ն G-ի Հաարի չափը և V-ն միավորի շրջակայք, որի փակումը σ-կոմպակտ է: Այդ դեպքում գոյություն ունի $E\subset G$ բազմություն, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

1) $\mu(E)=0$

2) Ցանկացած հաշվելի $A\subset V$ բազմության համար գոյություն ունի այնպիսի էլեմենտ $g\in G$ որ $gA\subset E$:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. Hadwiger*, Comment. Math. Helvet. 19 (1946/47), 236—239. [2] *D. Z. Djokovic*, Comment. Math. Helvet. 46 (1971), 137—140. [3] *J. M. Marstrand*, Bull. London Math. Soc. 4 (1972), 191—195.