

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Ф. Минасян

Несимметричная контактная задача для полуплоскости
 с вертикальным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 9/VI 1975)

Рассматривается плоская контактная несимметричная задача для изотропной полуплоскости, разрезанной вдоль оси y (рис. 1), начиная с расстояния a от границы.

На участке $(-a_2, a_1)$ границы полуплоскости приложен жесткий штамп, с основанием произвольной формы, несимметрично расположенный относительно разреза. На всей границе полуплоскости касательные напряжения отсутствуют, нормальные напряжения на границе отсутствуют вне штампа.

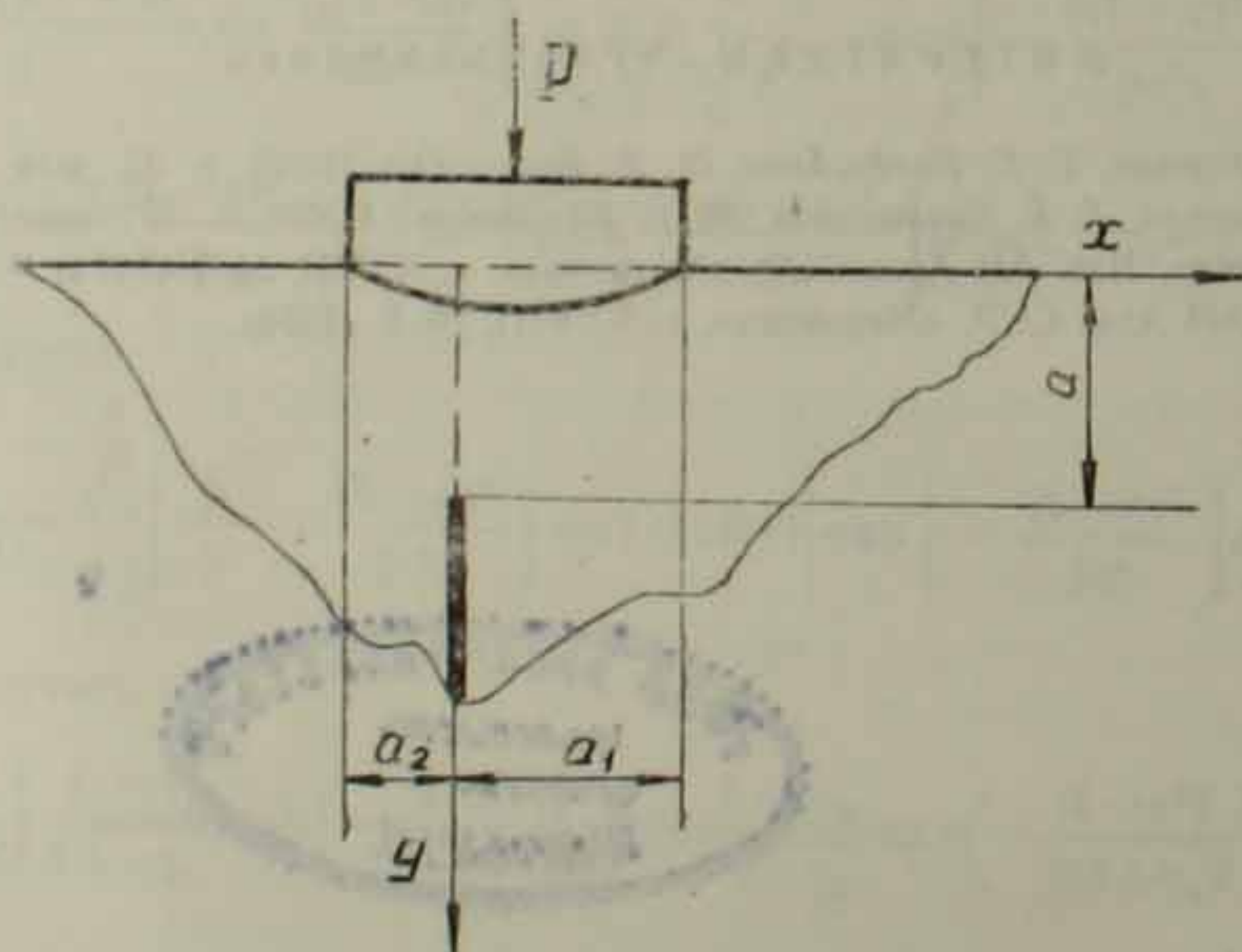


Рис. 1

На линии разреза напряжения считаются отсутствующими. На вертикальной оси вне разреза заданы условия полного контакта.

Поставленная задача сводится к определению одной бигармонической функции, принимающей значения $\Phi_1(x, y)$ в области правого квадрата, $\Phi_2(x, y)$ в области левого квадрата.

Задача решена методом Фурье. Определение неизвестных функций сведено к системе, состоящей из четырех «парных» интегральных уравнений, которые в дальнейшем сводятся к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Доказано, что последняя система решается методом последовательных приближений.

Для решения поставленной задачи бигармонические функции ищутся в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) = & \int_0^{\infty} [A_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) d\alpha + \int_0^{\infty} [C_1(\beta) + \\ & + \beta y D_1(\beta)] e^{-\beta y} \sin(\beta x) d\beta; \\ & 0 < x < \infty; \quad 0 < y < \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, y) = & \int_0^{\infty} [A_2(\alpha) - \alpha x B_2(\alpha)] e^{\alpha x} \cos(\alpha y) d\alpha + \int_0^{\infty} [C_2(\beta) + \beta y D_2(\beta)] e^{-\beta y} \sin(\beta x) d\beta. \\ & -\infty < x < 0; \quad 0 < y < \infty. \end{aligned}$$

Здесь

$$A_i(\alpha); \quad B_i(\alpha); \quad C_i(\beta); \quad D_i(\beta) \quad (i=1, 2).$$

Неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий:

$$\begin{aligned} v_1(x, 0) = f_1(x) & \quad 0 \leq x \leq a_1. & v_2(x, 0) = f_2(x) & \quad -a_2 \leq x \leq 0. \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0) = 0 & \quad a_1 < x < \infty. & \sigma_y^{(2)}(x, 0) = 0. & \quad -\infty < x < -a_2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0 \quad 0 < x < \infty. \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < 0.$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(0, y) = 0 \quad \sigma_x^{(1)}(0, y) = 0 \quad a < y < \infty.$$

$$\sigma_x^{(2)}(0, y) = 0 \quad \tau_{xy}^{(2)}(0, y) = 0 \quad a < y < \infty. \quad (3)$$

И условия полного контакта:

$$\sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) \quad 0 < y < a. \quad u_1(0, y) = u_2(0, y) \quad 0 < y < a.$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(0, y) = \tau_{xy}^{(2)}(0, y) \quad 0 < y < a. \quad v_1(0, y) = v_2(0, y) \quad 0 < y < a. \quad (4)$$

Граничные условия (3) и условия полного контакта (4) эквивалентны следующим условиям:

$$\sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) \quad 0 \leq y < \infty.$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(0, y) = \tau_{xy}^{(2)}(0, y) \quad 0 \leq y < \infty. \quad (5)$$

$$u_1(0, y) = u_2(0, y) \quad 0 < y < a. \quad v_1(0, y) = v_2(0, y) \quad 0 < y < a.$$

$$\sigma_x^{(1)}(0, y) = 0 \quad a < y < \infty. \quad \tau_{xy}^{(1)}(0, y) = 0 \quad a < y < \infty.$$

Используя обычные формулы для определения напряжений и перемещений ⁽¹⁾ и удовлетворяя условиям (3) и (6), получаем:

$$C_1(\beta) = D_1(\beta); \quad C_2(\beta) = D_2(\beta); \quad A_1(x) = A_2(x). \quad (6)$$

$$\alpha |B_2(\alpha) + B_1(\alpha)| = 2\alpha A_1(\alpha) - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} D_1(\beta) d\beta + \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} D_2(\beta) d\beta. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta D_1(\beta) \sin(\beta x) d\beta &= \frac{E}{2} f_1(x) & 0 < x < a_1 \\ \int_0^{\infty} \beta^2 D_1(\beta) \sin(\beta x) d\beta &= \int_0^{\infty} \alpha^2 |A_1(\alpha) - 2B_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)| e^{-\alpha x} d\alpha & a_1 < x < \infty \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta D_2(\beta) \sin(\beta x) d\beta &= \frac{E}{2} f_2(x) & -a_2 \leq x < 0 \\ \int_0^{\infty} \beta^2 D_2(\beta) \sin(\beta x) d\beta &= \int_0^{\infty} \alpha^2 [A_1(\alpha) - 2B_2(\alpha) - \alpha x B_2(\alpha)] e^{\alpha x} d\alpha & -\infty < x < a_2 \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{\infty} \alpha A_1(\alpha) \cos(\alpha y) d\alpha &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \beta y e^{-\beta y} \beta D_1(\beta) d\beta + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y - 1 + \nu \beta y) e^{-\beta y} \beta D_2(\beta) d\beta & 0 < y < a. \\ \int_0^{\infty} \alpha^2 A_1(\alpha) \cos(\alpha y) d\alpha &= 0 & a < y < \infty. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{\infty} \alpha [B_2(\alpha) - B_1(\alpha)] \sin(\alpha y) d\alpha &= 0 & 0 < y < a. \\ \int_0^{\infty} \alpha^2 [B_2(\alpha) - B_1(\alpha)] \sin(\alpha y) d\alpha &= \int_0^{\infty} \beta^2 y e^{-\beta y} \beta D_1(\beta) d\beta + \int_0^{\infty} \beta^2 y e^{-\beta y} \beta D_2(\beta) d\beta & a < y < \infty. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

где $-E$ и ν — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Используя результаты работы (2,3) из (8), (9) и (10) получаем

$$\beta D_1(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{a_1} \Psi_1(t) I_0(\beta t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{a_1}^{\infty} F_1(t) I_0(\beta t) dt. \quad (12)$$

$$\beta D_2(\beta) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{a_2} \Psi_2(\tau) I_0(\beta \tau) d\tau - \frac{2}{\pi} \int_{a_2}^{\infty} F_2(\tau) I_0(\beta \tau) d\tau. \quad (13)$$

$$\alpha A_1(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^a r F(r) I_1(\alpha r) dr. \quad (14)$$

$$F_1(t) = t \int_0^{\infty} \alpha^2 A_1(\alpha) K_0(\alpha t) d\alpha - 2t \int_0^{\infty} \alpha^2 B_1(\alpha) K_0(\alpha t) d\alpha + t^2 \int_0^{\infty} \alpha^3 B_1(\alpha) K_1(\alpha t) d\alpha. \quad (15)$$

$$\Psi_1(t) = \frac{d}{dt} \frac{E}{2} \int_0^t \frac{x f_1(x) dx}{\sqrt{t^2 - x^2}}. \quad (16)$$

$$F_2(\tau) = \tau \int_0^{\infty} \alpha^2 A_1(\alpha) K_0(\alpha \tau) d\alpha - 2\tau \int_0^{\infty} \alpha^2 B_2(\alpha) K_0(\alpha \tau) d\alpha + \tau^2 \int_0^{\infty} \alpha^3 B_2(\alpha) K_1(\alpha \tau) d\alpha. \quad (17)$$

$$\Psi_2(\tau) = \frac{d}{d\tau} \frac{E}{2} \int_0^{\tau} \frac{x f_2(-x) dx}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}. \quad (18)$$

$$F(r) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \beta \left[\beta r I_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} - \beta r L_0(\beta r) \right] \beta D_1(\beta) d\beta + \\ + \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \left[(1 - \nu) \left(\beta I_1(\beta r) - \beta L_1(\beta r) - \frac{2}{\pi} \beta \right) + \nu \beta \left(\beta r I_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} - \beta r L_0(\beta r) \right) \right] \beta D_2(\beta) d\beta. \quad (19)$$

Здесь

$K_\nu(z)$ — функция Макдональда;

$I_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента;

$J_\nu^{(2)}(z)$ — функция Бесселя первого рода от действительного аргумента;

$L_\nu(z)$ — функция Струве от мнимого аргумента.

При получении формул (14) были учтены значения следующих интегралов (4):

$$\int_0^r \frac{\cos(\alpha y) dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{\pi}{2} I_0(\alpha r); \quad \int_r^{\infty} \frac{y \cos(\alpha y) dy}{\sqrt{y^2 - r^2}} = -\frac{\pi}{2} r I_1(\alpha r),$$

$$\int_0^r \frac{y e^{-\beta y} dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{\pi}{2} r \left[L_1(\beta r) + \frac{2}{\pi} - I_1(\beta r) \right],$$

$$\int_0^r \frac{e^{-\beta y} dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{\pi}{2} [I_0(\beta r) - L_0(\beta r)].$$

Для решения „парных“ интегральных уравнений (11) умножаем первое уравнение (11) на $y(r^2 - y^2)^{-1/2} dy$, интегрируем по y от нуля до r , затем дифференцируем по r ; второе уравнение (11) умножаем на $(y^2 - r^2)^{-1/2} dy$ интегрируем по y от r до ∞ и используя формулу обращения для преобразования Ханкеля, получаем;

$$\alpha[B_2(x) - B_1(x)] = \frac{2}{\pi} \int_a^{\infty} r \Psi(r) I_0(\alpha r) dr, \quad (20)$$

где

$$\Psi(r) = \int_0^{\infty} \beta^2 r K_1(\beta r) \beta D_1(\beta) d\beta + \int_0^{\infty} \beta^2 r K_1(\beta r) \beta D_2(\beta) d\beta. \quad (21)$$

Подставляя значение $\alpha A_1(x)$ из (14) в (7) получаем

$$\begin{aligned} \alpha(B_2(x) + B_1(x)) &= \frac{2}{\pi} \int_0^a r F(r) I_1(\alpha r) dr - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} D_1(\beta) d\beta + \\ &+ \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} D_2(\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (22)$$

Из уравнений (20) и (22) имеем

$$\begin{aligned} \alpha B_1(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^a r F(r) I_1(\alpha r) dr - \frac{1}{\pi} \int_a^{\infty} r \Psi(r) I_0(\alpha r) dr - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} D_1(\beta) d\beta + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} D_2(\beta) d\beta, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \alpha B_2(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^a r F(r) I_1(\alpha r) dr + \frac{1}{\pi} \int_a^{\infty} r \Psi(r) I_0(\alpha r) dr - \\ &- \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} D_1(\beta) d\beta + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} D_2(\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя значения функций $\alpha A_1(x)$, $\alpha B_1(x)$, $\alpha B_2(x)$ в формулы (14), (23), (24) в (16) и (18) и учитывая формулы (12) и (13) для определения $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$, получаем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$F_1(z) = Q_1(z) + \int_{a_1}^{\infty} K_1(z, t) F_1(t) dt + \int_{a_2}^{\infty} K_2(z, \tau) F_2(\tau) d\tau, \quad (25)$$

$$F_2(z) = \Omega_2(z) + \int_{a_1}^{\infty} K_3(z, t) F_1(t) dt + \int_{a_2}^{\infty} K_4(z, \tau) F_2(\tau) d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1(z) = & \int_0^{a_1} \Psi_1(t) dt \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (x^2 z^2 K_1(xz) - az K_0(xz)) dx \cdot \int_a^{\infty} r I_1(ar) dr \times \right. \\ & \times \int_0^{\infty} \beta \left[\beta r I_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} - \beta r L_0(\beta r) \right] I_0(\beta t) d\beta + \frac{8}{\pi^2} z \int_a^{\infty} \frac{r^5}{(z^2 + r^2)^2 (r^2 + t^2)^2} dr - \\ & - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} (x^2 z^2 K_1(xz) - 2xz K_0(xz)) \left(K_0(xt) - \frac{at}{2} K_1(xt) \right) dx \left. \right\} + \\ & + \int_0^{a_2} \Psi_2(\tau) d\tau \left\{ \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} (az K_0(az) - x^2 z^2 K_1(xz)) dx \cdot \int_0^a r I_1(ar) dr \times \right. \\ & \times \int_0^{\infty} \left[(1-\nu) \left(\beta I_1(\beta r) - \beta L_1(\beta r) - \frac{2}{\pi} \beta \right) + \nu \beta \left(\beta r I_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \beta r L_0(\beta r) \right) \right] I_0(\beta \tau) d\beta - \frac{8}{\pi^2} z \int_a^{\infty} \frac{r^5}{(z^2 + r^2)^2 (t^2 + r^2)^2} dr - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} (x^2 z^2 K_1(xz) - \\ & - 2xz K_0(xz)) \times \left(K_0(x\tau) - \frac{ar}{2} K_1(x\tau) \right) dx \left. \right\}, \\ K_1(z, t) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (x^2 z^2 K_1(xz) - az K_0(xz)) dx \cdot \int_0^a r I_1(ar) dr \times \int_0^{\infty} \beta \left[\beta r I_0(\beta r) - \right. \\ & - \frac{2}{\pi} - \beta r L_0(\beta r) \left. \right] I_0(\beta t) d\beta + \frac{8}{\pi^2} z \int_a^{\infty} \frac{r^5 dr}{(z^2 + r^2)^2 (r^2 + t^2)^2} - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} (x^2 z^2 K_1(xz) - \\ & - 2xz K_0(xz)) \times \left(K_0(xt) - \frac{at}{2} K_1(xt) \right) dx, \\ K_2(z, \tau) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (az K_0(az) - x^2 z^2 K_1(xz)) dx \cdot \int_0^a r I_1(ar) dr \times \\ & \times \int_0^{\infty} \left[(1-\nu) \left(\beta I_1(\beta r) - \beta L_1(\beta r) - \frac{2}{\pi} \beta \right) + \nu \beta \left(\beta r I_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} - \beta r L_0(\beta r) \right) \right] \times \\ & \times I_0(\beta \tau) d\beta - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} (x^2 z^2 K_1(xz) - 2xz K_0(xz)) \left(K_0(x\tau) - \frac{a\tau}{2} K_1(x\tau) \right) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_2(z) &= \int_0^a W_1(t) dt \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (x^2 z^2 K_1(xz) - xz K_0(xz)) dx \int_0^a r I_1(ar) dr \times \right. \\
&\times \int_0^\infty \beta \left[\beta r I_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} - \beta r L_0(\beta r) \right] I_0(\beta t) d\beta - \frac{8}{\pi^2} z \int_0^\infty \frac{r^5}{(z^2+r^2)^2(t^2+r^2)^2} dr - \\
&- \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty (x^2 z^2 K_1(xz) - 2xz K_0(xz)) \left(K_0(xt) - \frac{xt}{2} K_1(xt) \right) dx + \\
&+ \int_0^a W_2(\tau) d\tau \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (xz K_0(xz) - x^2 z^2 K_1(xz)) dx \int_0^a r I_1(ar) dr \times \right. \\
&\times \int_0^\infty \left[(1-\nu) \left(\beta I_1(\beta r) - \beta L_1(\beta r) - \frac{2}{\pi} \beta \right) + \nu \beta \left(\beta r I_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} - \right. \right. \\
&- \left. \left. \beta r L_0(\beta r) \right) \right] I_0(\beta \tau) d\beta + \frac{8}{\pi^2} z \int_a^\infty \frac{r^5 dr}{(z^2+r^2)^2(t^2+r^2)^2} - \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty (x^2 z^2 K_1(xz) - \\
&- 2xz K_0(xz)) \left(K_0(x\tau) - \frac{x\tau}{2} K_1(x\tau) \right) dx \left. \right\}, \\
K_3(z, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (x^2 z^2 K_1(xz) - xz K_0(xz)) dx \int_0^a r I_1(ar) dr \times \int_0^\infty \beta \left[\beta r I_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} - \right. \\
&- \left. \beta r L_0(\beta r) \right] I_0(\beta t) d\beta - \frac{8}{\pi^2} z \int_a^\infty \frac{r^5 dr}{(z^2+r^2)^2(t^2+r^2)^2} - \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty (x^2 z^2 K_1(xz) - \\
&- 2xz K_0(xz)) \left(K_0(xt) - \frac{xt}{2} K_1(xt) \right) dx, \\
K_4(z, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (xz K_0(xz) - x^2 z^2 K_1(xz)) dx \int_0^a r I_1(ar) dr \times \int_0^\infty (1-\nu) \left(\beta I_1(\beta r) - \right. \\
&- \left. \beta L_1(\beta r) - \frac{2}{\pi} \beta \right) + \nu \beta \left(\beta r I_0(\beta r) - \frac{2}{\pi} - \beta r L_0(\beta r) \right) \left. \right] I_0(\beta \tau) d\beta + \\
&+ \frac{8}{\pi^2} z \int_a^\infty \frac{r^5 dr}{(z^2+r^2)^2(t^2+r^2)^2} - \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty (x^2 z^2 K_1(xz) - 2xz K_0(xz)) \left(K_0(x\tau) - \right. \\
&- \left. \frac{x\tau}{2} K_1(x\tau) \right) dx.
\end{aligned}$$

Систему (25) можно решить методом последовательных приближений, так как доказывается, что

$$\int_0^{\infty} |K_1(z, t)| dt + \int_0^{\infty} |K_2(z, \tau)| d\tau < 1,$$

$$\int_0^{\infty} |K_3(z, t)| dt + \int_0^{\infty} |K_4(z, \tau)| d\tau < 1.$$

Имея в виду асимптотическое разложение функций Бесселя и Струве для больших z (⁵), получим, что функции $\Omega_1(z)$ и $\Omega_2(z)$ ограничены сверху. Решая систему (25) получим выражение функций $F_1(t)$ $F_2(\tau)$. Далее по формулам (12), (13), (14), (23) и (24) последовательно можно определить все искомые функции.

Напряжения и перемещения по известным формулам будут определены в любой точке полуплоскости.

Ереванский политехнический институт имени К. Маркса.

Վ. Յ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Ուղղաձիգ ճեղքով կիսահարթության ոչ համաչափ կոնտակտային խնդիրը

Դիտարկվում է հորիզոնական եզրից վերջավոր հեռավորության վրա կիսաանվերջ, ուղղաձիգ ճեղք ունեցող իզոտրոպ կիսահարթության ոչ համաչափ կոնտակտային խնդիրը:

Կիսահարթության հորիզոնական եզրին ճնշում է վերջավոր հիմքով, ճեղքի նկատմամբ ոչ համաչափ դասավորված, կոշտ դրոշմը: Ենթադրվում է, որ շփումը՝ դրոշմի և կիսահարթության միջև բացակայում է: Պարզության համար, ընդունված է, որ կիսահարթության եզրը՝ դրոշմից դուրս ազատ է արտաքին ուժերից, ինչպես նաև ճեղքի եզրում լարումները բացակայում են: Ընդդիմաց դուրս ուղղաձիգ ուղղությամբ տրված են լրիվ կոնտակտի սլայմաններ:

Խնդրի լուծումը բերվում է շորս «զույգ» ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի լուծման, որոնց լուծումը հանդում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի երկու ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի լուծմանը:

Վերջին հավասարումների սիստեմը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների եղանակով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи метаматической теории упругости, Изд. «Наука», ф/м, М., 1966. ² В. С. Тоноян, «Известие АН Арм. ССР», механика, т. XXI № 2, (1968). ³ В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян, ДАН Арм. ССР, т. 51, № 3, (1970). ⁴ И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962. ⁵ В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян, «Известия АН Арм. ССР», механика, т. XXV, № 3, (1972).