ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXI 1975 3

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Г. В. Вирабян

О разложении полиномиального операторного пучка на линейные множители

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 17/VI 1975)

После основополагающей работы ([1]) М. Г. Крейна и Г. К. Лангера, в связи с изучением вопросов многократной полноты системы собственных и присоединенных элементов операторных пучков, появился ряд работ, посвященных задаче разложения этих пучков на множители, обладающие определенными свойствами (так называемой задаче факторизации).

Ниже нами устанавливается одно достаточное условие, при котором полиномиальный операторный пучок допускает разложение на линейные множители. Приведенная методика основана на изучении полиномиального операторного уравнения с помощью классического принципа неподвижной точки.

Рассмотрим операторный пучок вида

$$L(\lambda)=\lambda^n A_n+\lambda^{n-1} A_{n-1}+\cdots+\lambda A_1+A_0, \tag{1}$$

где $A_i(i=0,1,\cdots,n)$ — линейные ограниченные операторы, действующие в банаховом пространстве B, причём $A_n=I$ — есть единичный оператор.

Обозначим через $R=R(B\to B)$ пространство линейных ограниченных опраторов, отображающих банахово пространство B в себя.

Одновременно рассмотрим ассоциированное с пучком (1) полиномиальное операторное уравнение

$$L(Z)\equiv A_nZ^n+A_{n-1}Z^{n-1}+\cdots+A_1Z+A_0=0. \tag{II}$$

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть при некотором фиксированном целом* $k(1\leqslant k\leqslant n)$ *операторы* $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ *имеют ограниченные обратные* $A_i^{-1}\in R$. *Тогда для любого числа* $r>1$ *существуют такие* $\delta_i>0\,(i=1,\cdots,k)$, *что при выполнении следующих соотношений*

$$\max_{1+i<j<n}\left\|A_i^{-1}A_j\right\|<\delta_i,\ (i=1,2,\cdots,k) \tag{1}$$

полиномиальный операторный пучок $L(\lambda)$ допускает представление

$$L(\lambda)=L_k(\lambda)\cdot(\lambda I-Y_k)\cdot\ldots\cdot(\lambda I-Y_1), \tag{2}$$

где $Y_i\in R$, $(i=1,\ldots,k)$, *а* $L_k(\lambda)$ — *некоторый пучок порядка* $n-k$.

Доказательство. Применяя с обеих сторон уравнения (II) оператор A_1^{-1}, перепишем его в виде

$$Z=\Phi(Z), \tag{3}$$

где

$$\Phi(Z)=-A_1^{-1}A_nZ^n-A_1^{-1}A_{n-1}Z^{n-1}-\ldots-A_1^{-1}A_2Z^2-A_1^{-1}A_0. \tag{4}$$

Очевидно, что оператор Φ отображает банахово пространство линейных ограниченных операторов R в R. В пространстве R рассмотрим замкнутый шар $\overline{S}=\{Z:\|Z\|\leq r\|A_1^{-1}A_0\|\}$ с центром в нуле и радиуса $r\|A_1^{-1}A_0\|$, $(r>1)$.

Пусть число δ_{11} такое, что

$$0<\delta_{11}<\frac{r-1}{r^n\cdot\|A_1^{-1}A_0\|^n+\cdot\cdot\cdot+r^2\|A_1^{-1}A_0\|}. \tag{5}$$

Тогда из соотношения

$$\max_{2\leq j\leq n}\left\|A_1^{-1}A_j\right\|<\delta_{11} \tag{6}$$

следует, что оператор Φ отображает замкнутый шар $\overline{S}$ в себя. В самом деле, пусть $Z\in S$, тогда в силу (5), (6) имеем

$$\|\Phi(Z)\|=\|A_1^{-1}A_nZ^n+A_1^{-1}A_{n-1}Z^{n-1}+\cdot\cdot\cdot+A_1^{-1}A_2Z^2+$$
$$+A_1^{-1}A_0\|\leq\|A_1^{-1}A_n\|\cdot\|Z\|^n+\|A_1^{-1}A_{n-1}\|\cdot\|Z\|^{n-1}+\cdot\cdot\cdot+$$
$$+\|A_1^{-1}A_2\|\cdot\|Z\|^2+\|A_1^{-1}A_0\|\leq(r^n\cdot\|A_1^{-1}A_0\|^{n-1}\cdot\|A_1^{-1}A_n\|+$$
$$+r^{n-1}\cdot\|A_1^{-1}A_0\|^{n-2}\|A_1^{-1}A_{n-1}\|+\cdot\cdot\cdot+r^2\cdot\|A_1^{-1}A_0\|\cdot\|A_1^{-1}A_2\|+$$
$$+1)\cdot\|A_1^{-1}A_0\|<r\cdot\|A_1^{-1}A_0\|, \tag{7}$$

что и означает $\Phi(Z)\in\overline{S}$.

Далее пусть число δ_{12} такое, что

$$0<\delta_{12}<\frac{1}{2r\|A_1^{-1}A_0\|+3r^2\cdot\|A_1^{-1}A_0\|^2+\ldots+nr^{n-1}\|A_1^{-1}A_0\|^{n-1}}. \tag{8}$$

Покажем, что при выполнении соотношения

$$\max_{2\leq j\leq n}\left\|A_1^{-1}A_j\right\|<\delta_{12} \tag{9}$$

Φ является оператором сжатия.

Действительно, для любых двух операторов $Z_1, Z_2 \in \bar{S}$ имеем

$$\|\Phi(Z_1)-\Phi(Z_2)\| \leq \|A_1^{-1}A_n\| \cdot \|Z_1^n - Z_2^n\| +$$
$$+\|A_1^{-1}A_{n-1}\| \cdot \|Z_1^{n-1}-Z_2^{n-1}\| + \cdots + \|A_1^{-1}A_2\| \cdot \|Z_1^2 - Z_2^2\|. \quad (10)$$

Далее с помощью математической индукции легко проверяется справедливость следующих неравенств

$$\|Z_1^2-Z_2^2\| = \|Z_1^2 - Z_2 \cdot Z_1 + Z_2Z_1 - Z_2^2\| = \|(Z_1-Z_2)\cdot Z_1 + Z_2 \cdot (Z_1-Z_2)\| \leq$$
$$\leq (\|Z_1\| + \|Z_2\|)\|Z_1-Z_2\| \leq 2r \cdot \|A_1^{-1}A_0\| \cdot (\|Z_1-Z_2\|). \quad (11)$$

$$\|Z_1^3-Z_2^3\| = \|Z_1^3 - Z_1^2Z_2 + Z_1^2Z_2 - Z_2^3\| = \|Z_1^2(Z_1-Z_2)+$$
$$+(Z_1^2-Z_2^2)\cdot Z_2\| \leq \|Z_1\|^2 \cdot \|Z_1-Z_2\| + \|Z_1^2-Z_2^2\| \cdot \|Z_2\| \leq$$
$$\leq 3r^2 \cdot \|A_1^{-1}A_0\|^2 \cdot \|Z_1-Z_2\|.$$

. . . .

$$\|Z_1^{n-1}-Z_2^{n-1}\| \leq (n-1)r^{n-2} \cdot \|A_1^{-1}A_0\|^{n-2} \cdot \|Z_1-Z_2\|. \ \|Z_1^n-Z_2^n\| =$$
$$= \|Z_1^n - Z_1^{n-1}Z_2 + Z_1^{n-1}Z_2 - Z_2^n\| = \|Z_1^{n-1}\cdot(Z_1-Z_2) + (Z_1^{n-1}-Z_2^{n-1})Z_2\| \leq$$
$$\leq \|Z_1\|^{n-1} \cdot \|Z_1-Z_2\| + \|Z_1^{n-1}-Z_2^{n-1}\| \cdot \|Z_2\| \leq n \cdot r^{n-1} \cdot \|Z_1-Z_2\|$$

Сопоставляя неравенства (10) и (11), получим

$$\|\Phi(Z_1)-\Phi(Z_2)\| \leq (2r \cdot \|A_1^{-1}A_0\| + 3r^2 \cdot \|A_1^{-1}A_0\|^2 + \cdots +$$
$$+ nr^{n-1} \cdot \|A_1^{-1}A_0\|) \cdot \|Z_1-Z_2\| = \alpha \cdot \|Z_1-Z_2\|. \quad (12)$$

где $\alpha < 1$ в силу неравенства (8).

Это значит, что при выполнении неравенства (9) Φ является оператором сжатия.

Положим $\delta_1 = \min(\delta_{11}, \delta_{12})$. Тогда вышеприведенные рассуждения приводят к следующему утверждению.

При наличии условия

$$\min_{2 \leq j \leq n} \|A_1^{-1}A_j\| < \delta_1 \quad (13)$$

оператор Φ одновременно отображает замкнутый шар $\bar{S}$ в себя и является оператором сжатия. Следовательно, в силу классического принципа сжатых отображений ([2]), оператор Φ имеет неподвижную точку $Z = Y_1 \in \bar{S}$, которая одновременно является решением полиномиального операторного уравнения (II) и поэтому пучок допускает представление

$$L(\lambda) = L_1(\lambda) \cdot (\lambda I - Y_1), \tag{14}$$

где $L_1(\lambda)$ пучок порядка $n-1$.

Таким образом, вышесформулированная теорема при $k=1$ доказана.

В представлении (14) пучок $L_1(\lambda)$ имеет вид

$$L_1(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j Y_1^{k-j-1} = \lambda^{n-1} \cdot B_{n-1} + \lambda^{n-2} \cdot B_{n-2} +$$

$$+ \cdot \cdot \cdot + \lambda B_1 + B_0, \tag{15}$$

где

$$B_j = A_{j+1} + A_{j+2} \cdot Y_1 + \cdot \cdot \cdot + A_n \cdot Y_1^{n-j-1},$$

$$j=0, 1, \cdot \cdot \cdot, n-1. \tag{16}$$

В частности,

$$B_{n-1} = A_n = I; \quad B_1 = A_2 + A_3 \cdot Y_1 + \cdot \cdot \cdot + A_n Y_1^{n-2}.$$

Для дальнейшего разложения пучка $L(\lambda)$, нужно на коэффиценты A_j $(j=0, 1, 2, \cdot \cdot \cdot, n)$ налагать такие условия, при которых полиномиальный пучок $L_1(\lambda)$ (порядка $n-1$) оказался бы в рамках применения вышедоказанной теоремы при $k=1$.

Пусть δ_{21} некоторое число, удовлетворяющее неравенству

$$O < \delta_{21} < \frac{1}{r \cdot \|A_1^{-1}A_0\| + r^2 \cdot \|A_1^{-1}A_0\|^2 + \ldots + r^{n-2} \cdot \|A_1^{-1}A_0\|^{n-2}}. \tag{17}$$

Покажем, что если оператор A_2 имеет ограниченный обратный $A_2^{-1} \in R$ и выполняется условие

$$\max_{3<j<n} \left\| A_2^{-1} A_j \right\| < \delta_{21},$$

то оператор B_1 также имеет ограниченный обратный $B_1^{-1} \in R$.

В самом деле, оператор B_1 можно представить в виде

$$B_1 = A_2 \cdot (I + A_2^{-1} A_3 Y_1 + \cdot \cdot \cdot + A_2^{-1} A_n Y_1^{n-2}) = A_2 \cdot (I - D_1), \tag{18}$$

где

$$D_1 = -A_2^{-1} A_3 Y_1 - \cdot \cdot \cdot - A_2^{-1} A_n \cdot Y_1^{n-2}. \tag{19}$$

Но в силу условия $Y_1 \in S(\|Y_1\| \leqq r \cdot \|A_1^{-1}A_0\|)$ и неравенства (17) имеем:

$$\|D_1\| \leqslant A_1^{-1} A_3 \| \cdot \|Y_1\| + \cdot \cdot \cdot + \|A_2^{-1} A_n\| \cdot \|Y_1\|^{n-2} <$$

$$< \delta_{21} \cdot (r \cdot \|A_2^{-1} A_0\| + \cdot \cdot \cdot + r^{n-2} \cdot \|A_1^{-1} A_0\|^{n-2}) < 1. \tag{20}$$

Поэтому (²) оператор B_1 имеет ограниченный обратный, который имеет вид

$$B_1^{-1}=(I-D_1)^{-1}\cdot A_2^{-1}. \tag{21}$$

Обозначим через δ_{22} положительное число, существование которого гарантируется вышедоказанной теоремой при $k=1$, согласно которой при выполнении неравенства

$$\max_{2<j<n-1}\left\|B_1^{-1}B_j\right\|<\delta_{22}$$

существует оператор $Y_2\in R$ такой, что пучок $L_1(\lambda)$ допускает представление

$$L_1(\lambda)=L_2(\lambda)\cdot(\lambda I-Y_2), \tag{22}$$

где $L_2(\lambda)$ некоторый пучок порядка $n-2$.

Пусть δ_{23} некоторое число, удовлетворяющее неравенству

$$O<\delta_{23}<\frac{\delta_{22}}{\|(I-D_1)^{-1}\|\cdot(1+r\|A_1^{-1}A_0\|+\ldots+r^{n-3}\cdot\|A_1^{-1}A_0\|^{n-3})} \tag{23}$$

Тогда при выполнении неравенства

$$\max_{3<j<n}\left\|A_1^{-1}A_j\right\|<\delta_{23} \tag{24}$$

имеем

$$\begin{aligned}\|B_1^{-1}B_j\| &= \|(I-D_1)^{-1}\cdot A_2^{-1}B_j\| = \|(I-D_1)^{-1}\cdot(A_2^{-1}A_{j+1}+\\ &+A_2^{-1}A_{j+2}Y_1+\ldots+A_2^{-1}A_nY_1^{n-j-1})\| \leqslant \|(I-D_1)^{-1}\|\cdot(\|A_2^{-1}A_{j+1}\|+\\ &+\|A_2^{-1}A_{j+2}\|\cdot r\cdot\|A_1^{-1}A_0\|+\ldots+\|A_2^{-1}A_n\|\cdot r^{n-j-1}\times\\ &\times\|A_1^{-1}A_0\|^{n-j-1})\leqslant\delta_{23}\cdot\|(I-D_1)^{-1}\|\cdot(1+r\cdot\|A_1^{-1}A_0\|+\ldots+\\ &+r^{n-j-1}\cdot\|A_1^{-1}A_0\|^{n-j-1})<\delta_{22},\end{aligned} \tag{25}$$

где $j=2,\ldots,n-1$.

Положим $\delta_2=\min(\delta_{21},\delta_{23})$.

Вышеприведенные рассуждения приводят к следующему утверждению. Если оператор A_2 имеет ограниченный обратный и выполняется условие

$$\max_{3<j<n}\left\|A_1^{-1}A_j\right\|<\delta_2, \tag{26}$$

то оператор B_1 также имеет ограниченный обратный и имеет место неравенство

$$\max_{2<j<n-1}\left\|B_1^{-1}B_j\right\|<\delta_{22}, \tag{27}$$

а следовательно и представление (22)

Таким образом, вышесформулированная теорема доказана и при $k=2$.

Применение метода математической индукции и дословное повторение вышеприведенных рассуждений завершает доказательство теоремы для любого фиксированного значения k.

Следствие 1. Из доказанной теоремы в частности следует, что если коэффициенты пучка (I) имеют ограниченные обратные $A_j^{-1} \in R, j = 1, 2, \ldots, n-1$, то для любого числа $r > 1$ существуют такие δ_i $i = 1, 2, \ldots, n-1$, что при выполнении следующих соотношений

$$\max_{1 \leq i < j \leq n} \| A_i^{-1} A_j \| < \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{28}$$

полиномиальный пучок (I) допускает полное разложение на линейные множители

$$L(\lambda) = (\lambda I - Y_n) \cdot (\lambda I - Y_{n-1}) \cdot \cdots \cdot (\lambda I - Y_2) \cdot (\lambda I - Y_1), \tag{29}$$

где $Y_i (i = 1, \ldots, n)$ некоторые линейные ограниченные операторы из пространства R.

Замечание. 1. Из доказательства теоремы легко усмотреть, что если коэффициент пучка (I) A_0 является вполне непрерывным оператором, то оператор Y_1, фигурирующий в разложении

$$L(\lambda) = L_k(\lambda) \cdot (\lambda I - Y_k) \ldots (\lambda I - Y_1), \tag{30}$$

также является вполне непрерывным.

Замечание 2. В отличие от оператора Y_1, который всегда является корнем полиномиального операторного уравнения (II), операторы $Y_j (j = 2, \ldots, k)$, вообще говоря, не являются решениями этого уравнения.

Замечание 3. Вышедоказанная теорема в некотором смысле является обобщением и усилением некоторых результатов из работ [3-5]. Приведенная нами методика позволяет в процессе доказательства теоремы одновременно получить оценки для чисел δ_k в зависимости от заданного числа $r > 1$. В частности при $k = 1$ имеем

$$0 < \delta_1 < \min \left(\frac{r-1}{r^2 \| A_1^{-1} A_0 \| + \ldots + r^n \cdot \| A_1^{-1} A_0 \|^{n-1}}, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2r \| A_1^{-1} A_0 \| + 3r^2 \| A_1^{-1} A_0 \|^2 + \ldots + nr^{n-1} \| A_1^{-1} A_0 \|^{n-1}} \right) \tag{31}$$

Отсюда для квадратичных ($n = 2$) пучков при $r = 2$ получаем

$$0 < \delta_1 < \frac{1}{4 \cdot \| A_1^{-1} A_0 \|}, \tag{32}$$

что совпадает с условием теоремы работы [3].

В заключение заметим, что в настоящей работе нами рассматривается так называемая формальная факторизация полиномиальных операторных пучков и что дальнейшее изучение спектральных свойств операторов Y_j ($j=1, 2, \ldots, k$) в связи с вопросами многократной полноты представляет несомненный интерес.

Ереванский государственный университет

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ

Պոլինոմիալ օպերատորային փնջի գծային արտադրիչների վերլուծության մասին

Աշխատանքում պոլինոմիալ օպերատորային $L(\lambda)=\lambda^n I+\lambda^{n-1}A_{n-1}+\ldots+\lambda A_1+A_0$ *փնջի համար, որտեղ* A_i ($i=0, 1, \ldots, n-1$) *գծային սահմանափակ օպերատորներ են բանախյան տարածության մեջ, ստացված է բավարար պայման, որի դեպքում* $L(\lambda)$ *փունջը թույլատրում է այսպես կոչված լրիվ ֆակտորիզացիա:*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Г. Крейн* и *Г. К. Лангер.* О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов. Труды Международного симпозиума по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды, Изд. «Наука», 1965. [2] *А. Н. Колмогоров* и *С. В. Фомин*, Элементы теории функций и функционального анализа. М., Изд. «Наука», 1972 [3] *И. В. Горюк*, О факторизации квадратичного операторного пучка. Вестник МГУ, «Математика», т. 5, 1970. [4] *Г. В. Вирабян*, «Известия АН Арм. ССР», № 3 (1974). [5] *Г. А. Исаев*, УМН, 23, вып. 1, 241—242 (1973).