ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 1

УДК 513

МАТЕМАТИКА

С. Х. Арутюнян

Геометрия n-кратных интегралов, зависящих от $n+s$ параметров

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 15/X 1975)

В предыдущей работе ([1]) рассматривались вопросы, связанные с геометрией n- кратного интеграла, зависящего от n параметров. Было установлено, что такой интеграл индуцирует в $2n$- мерном дважды расслоенном многообразии переменных и параметров M невырожденную метрику; эйнштейновость этой метрики означала, что формы объема слоев первого и второго расслоений порождают эквивалентные геометрии, и, наконец, интегралы, порождающие псевдоевклидову метрику, могли быть приведены к «каноническому» виду— обобщенному интегралу Лапласа—Фурье.

В настоящей работе рассматриваются аналогичные вопросы в случае, когда число параметров превосходит (и существенно превосходит) число переменных интегрирования в интеграле

$$I=\int K(x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_{n+s})dx^1 \ldots dx^n.$$

Строится билинейная форма специального вида и выделяется тензорный инвариант, обращение в нуль которого соответствует плоскому случаю. Для этого случая получен «канонический» вид, к которому может быть приведен интеграл I. Этим выясняется геометрический смысл другого обобщения интеграла Лапласа—Фурье.

Рассмотрим дифференцируемое многообразие M размерности $2n+s$, где s пока произвольно, которое одновременно является дважды расслоенным пространством: задано два дифференцируемых отображения многообразия M на n- и $(n+s)$—мерные дифференцируемые многообразия M_1 и M_2, обозначим их через π_1 и π_2; слои расслоения, то есть прообразы точек из M_1 и M_2 при отображениях π_1 и π_2, являются соответственно $(n+s)$- и n-мерными многообразиями, и, наконец, касательные пространства к слоям расслоений π_1 и π_2 имеют лишь нулевое пересечение. Зафиксируем в пределах произвольной карты на M с локальными координатами $x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_{n+s}$ некоторый репер $(\mathbf{e}_i)^0$, $(\mathbf{e}^\alpha)_0$, где

$i, k, \ldots = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, n+s$ и положим по определению

$$\mathbf{e}_i = \bar{x}_i^k (\mathbf{e}_k)_0, \quad \mathbf{e}^\alpha = \bar{y}_\beta^\alpha (\mathbf{e}^\beta)_0,$$

где новые переменные $\bar{x}_i^k$ и $\bar{y}_\beta^\alpha$ не зависимы от ранее введенных координат и друг от друга, причем образуют матрицы с ненулевыми определителями. Образуем линейные дифференциальные формы

$$\omega^i = x_k^i dx^k, \qquad \omega_\alpha = -y_\alpha^\beta dy_\beta,$$

где через x_k^i и y_α^β обозначены элементы матриц, обратных соответственно к матрицам $(\bar{x}_i^k)$ и $(\bar{y}_\beta^\alpha)$ [2].

Таким образом, в каждой точке касательного пространства к слою имеется базис, который преобразуется элементами полной линейной группы. Известно [3], что совокупность всех таких базисов (реперов) образует некоторое дифференцируемое многообразие, которое обычно обозначается через $M^{(1)}$. В данном случае на всем пространстве двойного расслоения имеется подвижный репер, n векторов которого в каждой точке составляют базис касательного пространства к слою расслоения π_2 в этой точке, а остальные $n+s$ векторов играют аналогичную роль в касательном пространстве слоя расслоения π_1 (в этой же точке), и система заданных на многообразии $M^{(1)}$ реперов инвариантных линейных дифференциальных форм $\omega^1, \ldots, \omega^n, \omega_1, \ldots, \omega_{n+s}$ (допуская некоторую вольность, мы обозначили через $M^{(1)}$ многообразие вышеуказанным образом специализированных реперов на M).

Задание этих главных форм определяет пространство расслоения M следующим образом: слои первого расслоения являются интегральными многообразиями максимальной размерности для системы дифференциальных уравнений $\omega^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, а слои второго расслоения находятся в аналогичном отношении с вполне интегрируемой системой уравнений $\omega_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \ldots, n+s$.

Для того, чтобы получить структурные уравнения этих форм, нужно продифференцировать внешним образом их выражения. Таким образом, они имеют вид

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega_k^i \wedge \omega^k \\ d\omega_\alpha = -\bar{\omega}_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta, \end{cases} \tag{1}$$

где $\omega_k^i = \bar{x}_k^p dx_p^i + x_{kp}^i \omega^p$, $\bar{\omega}_\alpha^\beta = -\bar{y}_\gamma^\beta dy_\alpha^\gamma + y_\alpha^{\beta\gamma} \omega_\gamma$, причем переменные x_{kp}^i и $y_\alpha^{\beta\gamma}$ симметричны относительно индексов k, p и β, γ. Далее, продифференцируем внешним образом первую группу структурных уравнений (1) и применим обобщенную лемму Картана [4], получим

$$d\omega_k^i = \omega_p^i \wedge \omega_k^p + \omega_{kp}^i \wedge \omega^p, \tag{2}$$

где линейные дифференциальные формы ω^i_{kp} должны удовлетворять тождеству вида

$$\omega^i_{kp}\wedge\omega^p\wedge\omega^k=0.$$

Их мы будем предполагать симметричными относительно индексов k и p. Относительно существования форм ω^i_{kp} заметим лишь, что такие симметричные формы существуют с достаточно большим произволом.

Рассмотрим теперь на многообразии M полубазовую n—форму первого расслоения

$$\Omega=\lambda(\cdot\ \cdot\ \cdot)\omega^1\wedge\cdot\ \cdot\ \cdot\wedge\omega^n,$$

которая определяет гладкую меру (объем) на каждом слое второго расслоения π_2. Коэффициент λ, входящий в выражение Ω, является отличной от нуля гладкой функцией на многообразии $M^{(1)}$ специальных реперов на M. Требование, чтобы Ω была формой на M, накладывает на функцию λ некоторые ограничения.

Будем изучать геометрию, которая определяется на M заданием формы Ω. Найдем условия, которым должна удовлетворять функция λ. Внешний дифференциал

$$d\Omega=(d\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\omega^i_i)\wedge\Omega,$$

точно так же, как и Ω, является дифференциальной формой на многообразии M. Это означает, что имеет место разложение

$$d\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\omega^i_i=\lambda^\alpha\omega_\alpha+\lambda_i\omega^i, \tag{3}$$

Далее, линейная дифференциальная форма $\varphi=\lambda^\alpha\omega_\alpha$ также является формой на M. Это следует из того факта, что φ однозначно определяется условием $d\Omega=\varphi\wedge\Omega$ и, кроме того, обращением в нуль на слоях второго расслоения π_2. Её дифференциал имеет вид:

$$d\varphi=(d\lambda^\alpha-\lambda^\beta\tilde{\omega}^\alpha_\beta)\wedge\omega_\alpha\ ,$$

который может быть упрощен. Если продифференцировать внешним образом соотношение (3) и использовать при этом структурные уравнения (1) и (2), то в результате применения леммы Картана получим:

$$d\lambda^\alpha-\lambda^\beta\tilde{\omega}^\alpha_\beta=\lambda^{\alpha\beta}\omega_\beta+\lambda^\alpha_i\omega^i\ , \tag{4}$$

причем коэффициенты $\lambda^{\alpha\beta}$ симметричны относительно индексов; подстановка этого соотношения в выражение дифференциала формы φ дает

$$d\varphi=\lambda^\alpha_i\omega^i\wedge\omega_\alpha$$

Будем рассматривать невырожденный случай (форма $d\varphi$ имеет максимальный ранг), тогда $\mathrm{Rang}(\lambda^\alpha_i)=n$. Это означает, что матрица

(λ_i^α) после некоторой канонизации может быть приведена к виду $(\lambda_i^\alpha)=(\delta_i^\alpha)$. Таким образом, на некотором подмногообразии $M_1^{(1)}\subset M^{(1)}$ реперов

$$d\varphi=\omega^i\wedge\omega_i. \tag{4}$$

Отметим, что эта форма оказывает существенное влияние на все дальнейшие рассмотрения.

Заметим, что соотношения (4) принимают вид.

$$\begin{cases} d\lambda^i-\lambda^\beta\,\tilde{\omega}_\beta^i=\omega^i+\lambda^{i\beta}\omega_\beta \\ d\lambda^\xi-\lambda^\beta\,\tilde{\omega}_\beta^\xi=\lambda^{\xi\beta}\omega_\beta\,, \end{cases} \tag{5}$$

где индексы ξ, η пробегают значения $n+1,\ldots,n+s$.

Канонизация $\lambda_i^\alpha=\delta_i^\alpha$ дает возможность упростить часть структурных уравнений за счет того, что $\tilde{\omega}_i^\xi$ оказываются главными формами на многообразии M. Действительно, если продифференцировать внешним образом (5), использовав при этом уравнения (1), а затем применить к получившемуся тождеству обобщенную лемму Картана, то получатся следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_i^\xi &= a_{ip}^\xi\omega^p+a_i^{\xi p}\omega_p+a_i^{\xi\eta}\omega_\eta \\ \tilde{\omega}_i^k-\omega_i^k &= a_i^{\xi k}\omega_\xi+\tilde{a}_{ip}^k\omega^p+\tilde{a}_i^{kp}\omega_p \end{aligned} \tag{6}$$

с соответствующими условиями симметрии между индексами в коэффициентах, которые получаются в результате обратной подстановки (6) в исходное тождество. Подстановка же (6) в (1) дает окончательный вид структурных уравнений форм ω_i:

$$d\omega_i=-\omega_i^k\wedge\omega_k+\omega_{ik}\wedge\omega^k, \tag{7}$$

где $\omega_{ik}=\tilde{a}_{ik}^p\omega_p+a_{ik}^\xi\omega_\xi$, и показывает, что ω_{ik} являются главными формами на многообразии M, симметричными относительно индексов. Возьмем размерность s настолько большой, чтобы формы ω_i, ω_{ik} были линейно независимы. Нетрудно подсчитать, что $s\geqslant\frac{1}{2}n(n+1)$.

Ограничимся рассмотрением случая $s=\frac{1}{2}n(n+1)$.

Займемся в первую очередь получением структурных уравнений форм ω_{ik}. С этой целью продифференцируем внешним образом уравнения (7) и применим (2); наиболее общая форма, удовлетворяющая получившемуся тождеству, согласно обобщенной лемме Картана имеет вид:

$$\Delta\omega_{ik}=-\omega_{ik}^p\wedge\omega_p+\omega_{ikp}\wedge\omega^p,$$

где через $\Delta\omega_{ik}$ обозначены ковариантные дифференциалы форм ω_{ik}

$$\Delta\omega_{ik} = d\omega_{ik} - \omega_{ip}\wedge\omega^p_k - \omega_{pk}\wedge\omega^p_i,$$

а формы ω_{ikp} можно считать симметричными по всем индексам. Поскольку формы ω_{ik} заменяют формы ω_ξ, то система форм ω_i, ω_{ik} должна быть вполне интегрируемой, т. е. внешнее дифференцирование структурных уравнений этих форм должно приводить к тождеству в результате алгебраического следствия из этих уравнений. Отсюда следует, что формы ω_{ikp} являются главными, будем искать их в виде

$$\omega_{ikp} = A^r_{ikp}\omega_r + A^{rs}_{ikp}\omega_{rs} + A_{ikpr}\omega^r.$$

Если подставить эти выражения в структурные уравнения форм ω_{ik}, то будет видна симметричность A_{ikpr} по всем индексам; далее, благодаря канонизации $\omega^p_{ik} \to \omega^p_{ik} + A^p_{ikr}\omega^r$, можно с самого начала считать, что $A^p_{ikr}=0$. Следовательно,

$$d\omega_{ik} = \omega_{ip}\wedge\omega^p_k + \omega_{pk}\wedge\omega^p_i - \omega^p_{ik}\wedge\omega_p + A^{rs}_{ikp}\omega_{rs}\wedge\omega^p. \tag{8}$$

Итог предварительным рассуждениям подводит

Предложение 1. Задание интеграла I (или, что то же самое, структурных уравнений (1) и полубазовой n—формы Ω первого расслоения) индуцирует на многообразии $M^{(1)}$ билинейную форму $d\varphi$; из условия невырожденности этой формы следует, что структурные уравнения форм ω_i имеют вид (7).

С помощью простых по идее вычислений доказывается

Предложение 2. Существует канонизация репера, относительно которой $\sum\limits_{s=1}^{n} A^{rs}_{iks}=0$. В результате этой канонизации формы ω^i_{kp} становятся главными формами, а величины A^{rs}_{ikp}—компонентами тензора.

На основании этого предложения без ограничения общности можно считать, что

$$\omega^i_{kp} = C^i_{kpr}\omega^r + C^{ir}_{kp}\omega_r + C^{irs}_{kp}\omega_{rs}. \tag{9}$$

Отсюда следует $\left(\text{при } s=\frac{1}{2}n(n+1)\right)$

Предложение 3. Если на многообразии M двойного расслоения задан интеграл I и невырожденная форма $d\varphi$, то на некотором подмногообразии реперов $M^{(1)}_2 \subset M^{(1)}_1 \subset M^{(1)}$ структурные уравнения (1) могут быть приведены к виду:

$$\begin{aligned} &d\omega^i = \omega^i_k\wedge\omega^k \\ &d\omega_i = -\omega^k_i\wedge\omega_k + \omega_{ik}\wedge\omega^k. \\ &d\omega_{ik} = \omega_{ip}\wedge\omega^p_k + \omega_{pk}\wedge\omega^p_i - C^p_{ikr}\omega^r\wedge\omega_p - C^{pr}_{ik}\omega_r\wedge\omega_p - C^{prq}_{ik}\omega_{rq}\wedge\omega_p + A^{rs}_{ikp}\omega_{rs}\wedge\omega^p. \end{aligned} \tag{10}$$

Следующее утверждение дает возможность пролить свет на геометрический смысл коэффициентов A^{rs}_{ikp}.

Предложение 4. Если $A^{rs}_{ikp}=0$, то все коэффициенты разложения (9) обращаются в нуль.

Пусть теперь $A^{rs}_{ikp}=0$. Структурные уравнения (10) принимают вид:

$$d\omega^i=\omega^i_k\wedge\omega^k,$$
$$d\omega_i=-\omega^k_i\wedge\omega_k+\omega_{ik}\wedge\omega^k,$$
$$d\omega_{ik}=\omega_{ip}\wedge\omega^p_k+\omega_{pk}\wedge\omega^p_i,$$
$$d\omega^i_k=\omega^i_p\wedge\omega^p_k. \qquad (11)$$

Таким образом, геометрически условие $A^{rs}_{ikp}=0$ выделяет плоский случай (ω^i, ω^i_k являются формами инфинитезимального перемещения репера в n—мерном аффинном пространстве R^n). Но геометрический смысл величин A^{rs}_{ikp} не сводится к обобщенной кривизне пространства двойного расслоения: обращение в нуль коэффициентов разложения (9) не влечет за собой уничтожение величин A^{rs}_{ikp}.

В целях упрощения вычислений ограничимся рассмотрением подмногообразия параллельных реперов. Тогда вторичные формы ω^i_k обращаются в нуль, а базисные формы ω^i, ω_{ik}, ω_i, как это видно из структурных уравнений (11), могут быть выбраны в виде:

$$\omega^i=dx^i,\ \omega_{ik}=du_{ik},\ \omega_i=dy_i-x^k du_{ik},$$

где (x^i, u_{ik}, y_i)—некоторая локальная система координат. Введем следующие обозначения для коэффициентов разложений дифференциалов величин λ_i, λ^i, λ^{ik}, взятых из тождества

$$d\ln\lambda=\lambda_i\omega^i+\lambda^i\omega_i+\lambda^{ik}\omega_{ik}:$$

$$d\lambda_i=a_{ik}\omega^k+\tilde{a}^k_i\omega_k+\tilde{a}^{kp}_i\omega_{kp} \qquad (3')$$
$$d\lambda^i=a^i_k\omega^k+a^{ik}\omega_k+a^{ikp}\omega_{kp},$$

$$d\lambda^{ik}=a^{ik}_p\omega^p+\tilde{a}^{ikp}\omega_p+a^{ikpq}\omega_{pq}$$

и подставим их в результат внешнего дифференцирования соотношения (3′). Подставим их также в результат дифференцирования формы φ, и сравним полученное выражение с (5). Благодаря этим подстановкам выявляются равенства вида

$$\tilde{a}^i_k=a^i_k=\delta^i_k,\quad a_{ik}=a_{ki},\quad a^{ik}=a^{ki},\quad \tilde{a}^{ikp}=a^{pik},$$

$$\tilde{a}^{ik}_p=0,\quad a^{ik}_p=\frac{1}{2}(\delta^i_p\lambda^k+\delta^k_p\lambda^i).$$

В результате возникает система соотношений:

$$\frac{\partial\lambda^i}{\partial x^k}=\delta^i_k,\ \frac{\partial\lambda^i}{\partial y_k}=a^{ik},\quad \frac{\partial\lambda^i}{\partial u_{kp}}=a^{ikp}-\frac{1}{2}(a^{ik}x^p+a^{ip}x^k),$$

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial x^k}=a_{ik}, \quad \frac{\partial\lambda_i}{\partial y_k}=\delta^i_k, \quad \frac{\partial\lambda_i}{\partial u_{kp}}=-\frac{1}{2}(\delta^k_i x^p+\delta^p_i x^k),$$

$$\frac{\partial\lambda^{ik}}{\partial x^p}=\frac{1}{2}(\delta^i_p\lambda^k+\delta^k_p\lambda^i), \quad \frac{\partial\lambda^{ik}}{\partial y_p}=a^{pik}, \quad \frac{\partial\lambda^{ik}}{\partial u_{pq}}=a^{ikpq}-\frac{1}{2}(a^{ikp}x^q+a^{ikq}x^p).$$

Разрешая их, получим решения в явном виде:

$$\lambda^i=x^i+\varphi^i(y, u),$$

$$\lambda_l=y_l-x^k u_{lk}+\psi_l(x),$$

$$\lambda^{ik}=\frac{1}{2}x^i x^k+\frac{1}{2}(x^i\varphi^k+x^k\varphi^i)+\varphi^{ik}(y, u).$$

Подставляя их в уравнение (3′) и интегрируя его, получим:

$$\ln\lambda=x^l y_l-\frac{1}{2}x^l x^k u_{lk}+\psi(x)+\varphi(y, u),$$

где через $\psi(x)$ и $\varphi(y, u)$ обозначены интегралы форм вида $\psi_l(x)dx^l$ и $(\varphi^l(y, u)dy_l+\varphi^{ik}(y, u)du_{ik})$. Таким образом, форма Ω приводится к виду

$$\Omega=P(x)Q(y, u)\,e^{x^l y_l-1/2x^l x^k U_{lk}}\,dx^1\wedge\cdot\cdot\cdot\wedge dx^n. \qquad (12)$$

Тем самым доказана

Теорема. Если n-кратный интеграл

$$I=\int K(x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_{n+s})dx^1\ldots dx^n, \qquad s=\frac{1}{2}n(n+1)$$

индуцирует на многообразии M двойного расслоения переменных и параметров невырожденную билинейную форму $d\varphi=\omega^i\wedge\omega_i$ и $A^{rs}_{ikp}=0$, то он приводится к интегралу от формы вида (12).

Интегралы от форм вида (12) естественно считать обобщением интегралов Лапласа—Фурье. Теорема проливает свет на их геометрический смысл.

Приношу глубокую благодарность А. М. Васильеву за постановку задачи и внимание к работе.

Ереванский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна.

Ս. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

$n+s$ պարամետրերից կախված n-պատիկ ինտեգրալների երկրաչափություն

Սույն աշխատանքը նվիրված է $n+s$ պարամետրերից կախված n-պատիկ ինտեգրալների լոկալ հատկությունների ուսումնասիրությանը $\left(s=\frac{1}{2}n(n+1)\right)$։ Հիմնական արդյունքն այն է, որ $y_1, \cdot\cdot\cdot, y_n, u_{11}, \cdot\cdot\cdot, u_{nn}$ պարամետրերի և ինտեգրման $x^1, \cdot\cdot\cdot, x^n$ փոփոխականների բազմաձևու-

թյան մեջ առանձնացվում է ինտեգրալի հետ ինվարիանտ կերպով կապված հատուկ ձևի աֆինական կապակցություն։

Նրա ոլորման տենզորի բաղադրիչների մի մասը նորից տենզոր է կազմում, որի զրոյին հավասարվելու պայմանը հանգեցնում է զրոյական կորության դեպքին և բնորոշում $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} y_i x^i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} u_{ik} x^i x^k \right)$ միջուկով ինտեգրալները։ Դա Ֆուրյե-Լապլասի միջուկի բնական ընդհանրացումն է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Х. Арутюнян,* ДАН Арм. ССР, т. LXI, № 1 (1975). [2] *А. М. Васильев,* «Математический сборник», т. 70 (112) : 4, 457—480, (1966). [3] *С. Стернберг,* Лекции по дифференциальной геометрии», Изд. «Мир», М., 1970. [4] *Г. Ф. Лаптев,* Труды Московского математического общества, т. II, 275—382, (1953).