ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 1

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Тоноян, А. Ф. Минасян

О симметричном вдавливании двух жестких одинаковых штампов в упругую полуплоскость с вертикальным конечным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 28/X 1975)

Рассматривается плоская симметричная контактная задача для упругой изотропной полуплоскости с разрезом конечной длины a вдоль оси (oy), начиная от горизонтальной границы.

На участках c-b горизонтальной границы полуплоскости приложены жесткие штампы с основанием произвольной формы, симметрично расположенные относительно оси разреза. Предполагается, что трение между штампами и полуплоскостью отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампов свободна от внешних усилий. В конечном разрезе, длина которого может быть определена, действует только нормальное давление (рис. 1).

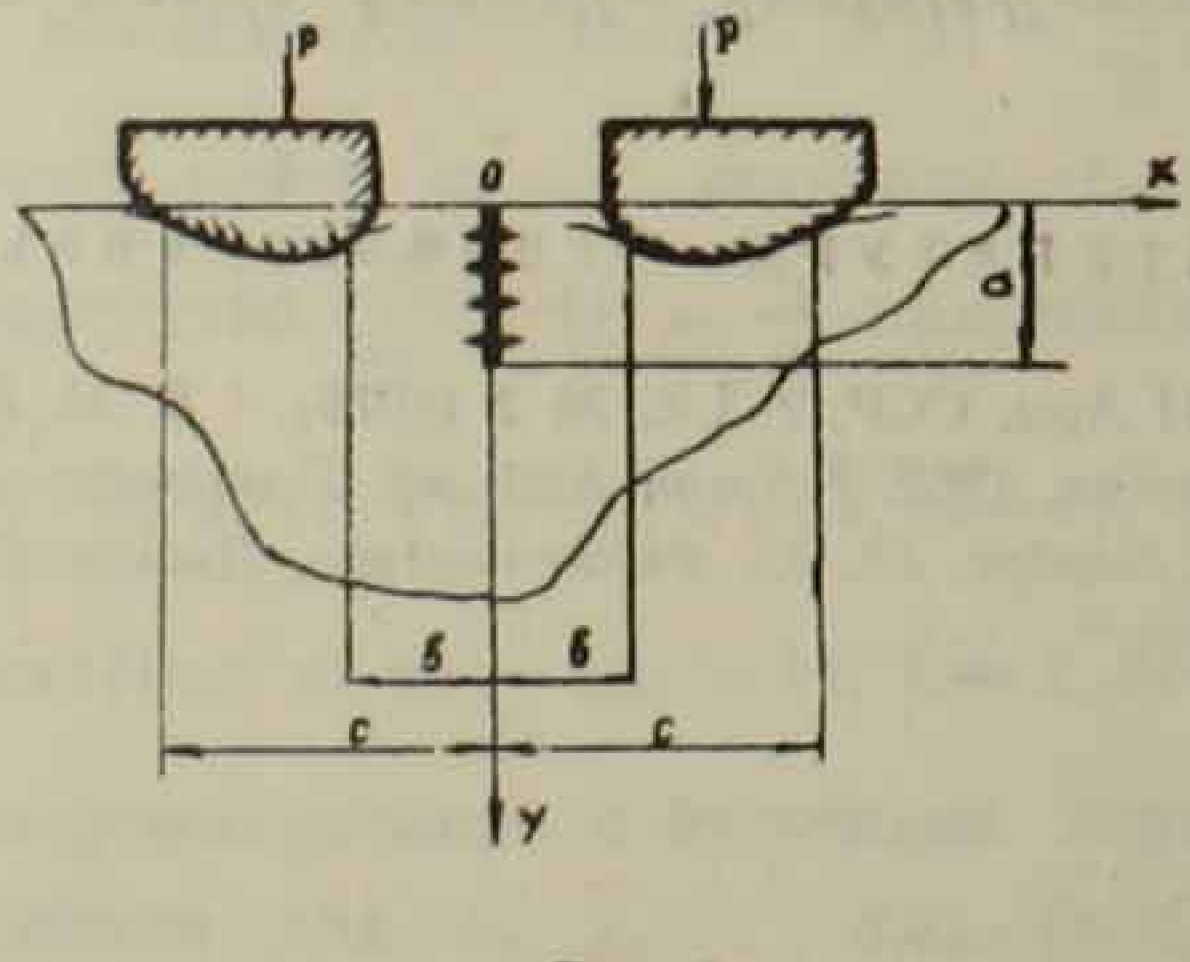

Рис. 1

Задача решена методом Фурье. Решение задачи сводится к системам «парных» и «тройных» интегральных уравнений. Эта система в свою очередь сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Показано, что решение последнего уравнения может быть найдено методом последовательных приближений. В частных случаях, когда $a \to 0$ или $a \to \infty$ соответственно получается симметричная контактная задача с двумя жесткими одинаковыми штампами для полуплоскости без разреза ([1-2]) и контактная задача для квадранта ([3]).

В силу симметрии, ограничиваемся рассмотрением только области квадранта ($0<x<\infty$; $0<y<\infty$) при следующих граничных условиях:

$$\tau_{xy}(x,\ 0)=0 \quad (0<x<\infty), \quad \sigma_y(x,\ 0)=0 \quad (0<x<b, \quad c<x<\infty),$$
$$v(x,0)=f_1(x) \quad (b<x<c), \quad \tau_{xy}(0,\ y)=0 \quad (0<y<\infty)$$
$$\sigma_x(0,\ y)=f_2(y) \quad (0<y<a), \quad u(0,\ y)=0 \quad (a<y<\infty). \tag{1}$$

Бигармоническую функцию Эри для решения рассматриваемой задачи ищем в виде:

$$\Phi(x,\ y)=\int_0^\infty [A(\alpha)+\alpha x B(\alpha)]e^{-\alpha x}\sin(\alpha y)d\alpha+\int_0^\infty [C(\beta)+\beta y D(\beta)]e^{-\beta y}\cos(\beta x)d\beta. \tag{2}$$

Напряжения и перемещения выражаются через бигармоническую функцию Эри известными соотношениями ([4]):

$$\sigma_x=-\int_0^\infty \alpha^2[A(\alpha)+\alpha x B(\alpha)]e^{-\alpha x}\sin(\alpha y)d\alpha+\int_0^\infty \beta^2[C(\beta)-2D(\beta)+$$
$$+\beta y D(\beta)]e^{-\beta y}\cos(\beta x)d\beta;$$

$$\sigma_y=\int_0^\infty \alpha^2[A(\alpha)-2B(\alpha)+\alpha x B(\alpha)]e^{-\alpha x}\sin(\alpha y)d\alpha-\int_0^\infty \beta^2[C(\beta)+$$
$$+\beta y D(\beta)]e^{-\beta y}\cos(\beta x)\,d\beta,$$

$$\tau_{xy}=\int_0^\infty \alpha^2[A(\alpha)-B(\alpha)+\alpha x B(\alpha)]e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)d\alpha-\int_0^\infty \beta^2[C(\beta)-D(\beta)+$$
$$+\beta y D(\beta)]e^{-\beta y}\sin(\beta x)d\beta,$$

$$u(x,\ y)=\frac{1}{E}\Big\{\int_0^\infty \alpha[A(\alpha)(1+\nu)+B(\alpha)(1-\nu)+B(\alpha)\alpha x(1+\nu)]e^{-\alpha x}\sin(\alpha y)d\alpha+$$
$$+\int_0^\infty \beta[C(\beta)(1+\nu)-2D(\beta)+D(\beta)\beta y(1+\nu)]e^{-\beta y}\sin(\beta x)d\beta\Big\},$$

$$v(x,\ y)=\frac{1}{E}\Big\{-\int_0^\infty \alpha[A(\alpha)(1+\nu)-2B(\alpha)+\alpha x B(\alpha)(1+\nu)]e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)d\alpha+$$
$$+\int_0^\infty \beta[C(\beta)(1+\nu)+D(\beta)(1-\nu)+\beta y D(\beta)(1+\nu)]e^{-\beta y}\cos(\beta x)d\beta\Big\}. \tag{3}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1), получаем:

$$A(\alpha) = B(\alpha) \tag{4}$$

$$D(\beta) = C(\beta) - \frac{4}{\pi\beta}\int_0^\infty \frac{\alpha^4 B(\alpha)d\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 B(\alpha)\sin(\alpha y)d\alpha = -f_2(y) + \int_0^\infty \beta^2[C(\beta) - 2D(\beta) + \beta y D(\beta)]e^{-\beta y}d\beta \quad 0<y<a$$

$$\int_0^\infty \alpha B(\alpha)\sin(\alpha y)d\alpha = 0 \quad a<y<\infty \tag{6}$$

$$\int_0^\infty \beta^2 C(\beta)\cos(\beta x)d\beta = 0 \qquad 0<x<b$$

$$\int_0^\infty \beta C(\beta)\cos(\beta x)d\beta = \frac{E}{2}f_1(x) + x\int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha x}B(\alpha)d\alpha \quad b<x<c, \tag{7}$$

$$\int_0^\infty \beta^2 C(\beta)\cos(\beta x)d\beta = 0 \qquad c<x<\infty$$

Из (6) выразим функцию $B(\alpha)$ через функцию $C(\beta)$.
Для этого умножим первое уравнение из (6) на $y(r^2-y^2)^{-1/2}$, проинтегрируем по y от нуля до r.

Умножим второе уравнение на $(y^2-r^2)^{-1/2}$ и интегрируя полученное равенство по y от r до бесконечности, потом дифференцируя по r, имеем:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \alpha B(\alpha)\alpha r J_1(\alpha r)d\alpha = -\int_0^r \frac{yf_2(y)dy}{\sqrt{r^2-y^2}} + \frac{\pi}{2}r\int_0^\infty \beta^2 C(\beta)\left[L_1(\beta r) + \frac{2}{\pi} - I_1(\beta r)\right]d\beta -$$

$$-2\frac{\pi}{2}r\int_0^\infty \beta^2 D(\beta)\left[L_1(\beta r) + \frac{2}{\pi} - I_1(\beta r)\right]d\beta + \frac{\pi}{2}r\int_0^\infty \beta^2 D(\beta)[L_1(\beta r) - I_1(\beta r) +$$

$$+ \beta r I_0(\beta r) - \beta r L_0(\beta r)]d\beta \qquad 0<r<a$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \alpha B(\alpha)\alpha r J_1(\alpha r)d\alpha = 0 \qquad a<r<\infty \tag{8}$$

$$\varphi_2(\varphi) = -\int_0^r \frac{yf_2(y)dy}{\sqrt{r^2-y^2}}. \tag{9}$$

Используя формулу обращения для преобразования Ханкеля, получаем:

$$\frac{\pi}{2}\alpha B(\alpha)=\int_0^a \varphi_2(r)J_1(\alpha r)dr+\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \beta^2 C(\beta)d\beta\int_0^a r\left[L_1(\beta r)+\frac{2}{\pi}-I_1(\beta r)\right]J_1(\alpha r)dr-$$

$$-\pi\int_0^\infty \beta^2 D(\beta)d\beta\int_0^a r\left[L_1(\beta r)+\frac{2}{\pi}-I_1(\beta r)\right]J_1(\gamma r)dr+\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \beta^2 D(\beta)d\beta\int_0^a r[L_1(\beta r)-$$

$$-I_1(\beta r)+\beta r I_0(\beta r)-\beta r L_0(\beta r)]J_1(\alpha r)dr, \qquad (10)$$

где $I_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента

$J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода от действительного аргумента

$L_\nu(z)$ — функция Струве от мнимого аргумента.

При получении (10) были использованы значения следующих интегралов [5]

$$\int_0^r \frac{y\sin(\alpha y)}{\sqrt{r^2-y^2}}dy=\frac{\pi}{2}rJ_1(\alpha r); \qquad \int_r^\infty \frac{\sin(\alpha y)}{\sqrt{y^2-r^2}}dy=\frac{\pi}{2}J_0(\alpha r),$$

$$\int_0^\infty \frac{ye^{-\beta y}}{\sqrt{r^2-y^2}}dy=\frac{\pi}{2}r\left[L_1(\beta r)+\frac{2}{\pi}-I_1(\beta r)\right],$$

$$\int_0^\infty \frac{y^2e^{-\beta y}}{\sqrt{r^2-y^2}}dy=\frac{\pi}{2}\,\frac{r}{\beta}\,[L_1(\beta r)-I_1(\beta r)+\beta r I_0(\beta r)-\beta r L_0(\beta r)].$$

Подставляя значение $D(\beta)$ из (5) в (10) получаем:

$$G(\gamma)=\frac{2}{\pi}\gamma\int_0^a \varphi_2(r)J_1(\gamma r)dr+\gamma\int_0^\infty \beta^2C(\beta)d\beta\int_0^a r\left[\beta rI_0(\beta r)-\beta rL_0(\beta r)-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\right]J_1(\gamma r)dr+\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \alpha^2G(\alpha)\left\{\int_0^\infty\frac{\beta d\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\int_0^a r\left[L_1(\beta r)+\frac{\pi}{4}-I_1(\beta r)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\beta rL_0(\beta r)-\beta rI_0(\beta r)\right]J_1(\gamma r)dr\right\}d\alpha,$$

где

$$\alpha^2B(\alpha)=G(\alpha); \qquad (11)$$

„Тройные" интегральные уравнения, подобные (7), рассматривались в работах [8–12].

Следуя [12], из (7) получаем:

$$C_n=2\xi(0)\sin\frac{\delta}{2}+4n(1-n)\sin^3\frac{\delta}{2}\int_0^1 s\xi(s)F\left(1+n,-n,2,s^2\sin^2\frac{\delta}{2}\right)ds \qquad (12)$$

$$C_n=(-1)^{n+1}C_n^* \qquad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* J_{2n-1}(\beta c) = \beta C(\beta), \tag{14}$$

$$\xi(s) = \frac{4}{\pi}\int_0^s \frac{z\varphi'\left[2\arcsin\left(z\sin\frac{\delta}{2}\right)\right]}{\sqrt{s^2-z^2}}\,dz + Q, \tag{15}$$

$$c\cos\frac{\delta}{2} = b, \tag{16}$$

$$\varphi'\left[2\arcsin\left(z\sin\frac{\delta}{2}\right)\right] = -\frac{Ec}{4}z\sin\frac{\delta}{2}f_1\left(c\sqrt{1-z^2\sin^2\frac{\delta}{2}}\right) -$$

$$-\frac{c^2}{2}z\sin\frac{\delta}{2}\sqrt{1-z^2\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_0^{\infty} G(\alpha)e^{-\alpha c\sqrt{1-z^2\sin^2\delta/2}}\,d\alpha, \tag{17}$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрический ряд,

Q — постоянная, которая должна быть найдена путем подстановки (14), (12) и (15) во второе уравнение (7) при $x=b$.

Подставляя значение $C(\beta)$ из (14) в (11) с учетом (13); (12) и (17), для определения функции $G(\alpha)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$G(\gamma) = \Omega(\gamma) + \int_0^{\infty} G(\alpha)K(\gamma, \alpha)\,d\alpha, \tag{18}$$

где

$$\Omega(\gamma) = \frac{2}{\pi}\gamma\int_0^a \varphi_2(r)J_1(\gamma r)\,dr + 4\gamma Q\sin^3\frac{\delta}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(1-n)\times$$

$$\times\int_0^1 sF\left(1+n, -n, 2, s^2\sin^2\frac{\delta}{2}\right)ds\int_0^{\infty}\beta J_{2n-1}(\beta c)\,d\beta\int_0^a r\left[\beta rI_0(\beta r) - \beta rL_0(\beta r) -\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\right]J_1(\gamma r)\,dr - \frac{4}{\pi}Ec\gamma\sin^4\frac{\delta}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(1-n)\int_0^1 s\left[\int_0^s\frac{zf_1(c\sqrt{1-z^2\sin^2\delta/2})}{\sqrt{s^2-z^2}}dz\right]\times$$

$$\times F\left(1+n, -n, 2\ s^2\sin^2\frac{\delta}{2}\right)ds\int_0^{\infty}\beta J_{2n-1}(\beta c)\,d\beta\int_0^a r\left[\beta rI_0(\beta r) -\right.$$

$$\left.-\beta rL_0(\beta r) - \frac{2}{\pi}\right]J_1(\gamma r)\,dr,$$

$$K(\alpha, \gamma) = \frac{4}{\pi}\gamma\int_0^{\infty}\frac{\alpha^2\beta\,d\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\int_0^a r\left[L_1(\beta r) + \frac{4}{\pi} - I_1(\beta r) + \beta rL_0(\beta r) - \beta rI_0(\beta r)\right]\times$$

$$\times J_1(\gamma r)dr - \frac{8}{\pi}\gamma c^2 \sin^4\frac{\delta}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(1-n)\int_0^1 s\left[\int_0^s \frac{z^2\sqrt{1-z^2\sin^2\delta/2}}{\sqrt{s^2-z^2}}\times\right.$$

$$\left.\times e^{-\alpha c\sqrt{1-z^2\sin^2\delta/2}}\,dz\right]F(1+n,\,-n,\,2,\,s^2\sin^2\delta/2)ds\int_0^{\infty}\beta J_{2n+1}(\beta c)d\beta\int_0^0 r\left[\beta r I_0(\beta r)-\right.$$

$$\left.-\beta r L_0(\beta r)-\frac{2}{\pi}\right]J_1(\gamma r)dr,$$

$$\int_0^1 sF\left(1+n,-n,2,\,s^2\sin^2\frac{\delta}{2}\right)ds=\frac{1}{2}F(1+n,\,-n,\,2,\sin^2\delta/2). \qquad (19)$$

Имея в виду асимптотическое разложение функций Бесселя и Струве для больших γ [13], получим, что $\lim\limits_{\gamma\to\infty}\Omega(\gamma)=0$ и $\int\limits_0^{\infty}|K(\alpha,\gamma)|d\alpha<1$. Значит, интегральное уравнение (18) можно решить методом последовательных приближений. Далее по формулам (17), (15), (12), (14) и (4) последовательно можно определить все искомые функции. Напряжения и перемещения по известным формулам (2) будут определены в любой точке полуплоскости, а длина разреза—из условия отсутствия особенности напряжения.

Институт механики Академии наук Армянской ССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Հ. Ֆ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Առաձիգ, վերջավոր երկարության ճեղքով թուլացված կիսահարթության համաչափ ճնշումը երկու միատեսակ կոշտ դրոշմներով

Դիտարկվում է հորիզոնական եզրից սկսած ուղղագիծ վերջավոր երկարության ճեղքով թուլացված իզոտրոպ, առաձգական կիսահարթության կոնտակտային խնդիրը։

Կիսահարթության եզրին ճնշում են կամայական հիմքերով, ճեղքի նկատմամբ համաչափ դասավորված միատեսակ դրոշմները։ Ենթադրվում է, որ շփումը՝ դրոշմների և կիսահարթության միջև բացակայում է։ Պարզության համար ընդունված է, որ կիսահարթության եզրը՝ դրոշմներից դուրս ազատ է արտաքին ուժերից, ինչպես նաև ճեղքի եզրերում ազդում են միայն նորմալ լարումները։

Խնդիրը բերվում է «զույգ» և «երիցս» ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի, որի լուծումը հանգում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։

Ցույց է տրված, որ հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների եղանակով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. С. Тоноян*, «Известия АН Арм. ССР, сер. физ.мат. наук», т. 17, № 2 (1964). [2] *Л. А. Галин*, Контактная задача теории упругости, ГИТТЛ, М., 1953. [3] *В. С. Тоноян*, ДАН Арм. ССР, т. 37, № 3 (1963). [4] *С. П. Тимошенко*, Теория упругости, ОНТИ, М., 1937. [5] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962. [6] *А. А. Баблоян*, ПММ, т. 28, вып. 6 (1964). [7] *I. N. Sneddon*, Proc. Glasgow Math. Ass. Vol. 4, 108—110, (1960). [8] *В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян*, ДАН Арм.ССР, т. 57, №5(1973). [9] *G. I. Tranter*, Proc. Glasgow Math. Ass. Vol 4, Pt. 4(1960). [10] *Г. М. Валов*, «Известия АН СССР». МТТ, № 5 (1972). [11] *А. А. Баблоян, С. М. Мхитарян*, «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. XXII, № 6 (1969). [12] *В. С. Тоноян*, ДАН Арм. ССР, т. 37, № 5 (1963). [13] *В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян*, «Известия АН Арм ССР», Механика, т. XXV, № 3 (1972).