

УДК 539.301

МЕХАНИКА

Р. К. Алексанян

Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 16/VII 1975)

Предлагается путь построения для угловой области системы собственных функций однородного дифференциального уравнения в частных производных одного порядка с постоянными коэффициентами. Эта возможность осуществляется в случае плоской задачи теории упругости для однородного анизотропного тела. С помощью построенной системы собственных функций исследуется поведение напряжений в угловой точке поперечного сечения призматического тела, находящегося в условиях плоской деформации и имеющего в каждой точке плоскость упругой симметрии, нормальной к образующим его боковой поверхности.

Начало прямолинейной декартовой системы координат поместим в угловой точке сечения призматического тела, направляя ось  $z$  нормально к плоскости упругой симметрии, а ось  $x$  по касательной одного из ветвей контура поперечного сечения. Угол между касательной второй ветви контура и осью  $x$  обозначим через  $\alpha_0$ .

При отсутствии массовых сил функция напряжений удовлетворяет дифференциальному уравнению (1)

$$a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0, \quad (1.1)$$

где  $a_{mn}$  упругие постоянные материала.

Предполагается, что примыкающие к угловой точке части контура поперечного сечения свободны от внешних нагрузок. Граничные условия можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \sin \alpha_0 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cos \alpha_0 \Big|_{\substack{x=r \cos \alpha_0 \\ y=r \sin \alpha_0}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \sin \alpha_0 + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cos \alpha_0 \Big|_{\substack{x=r \cos \alpha_0 \\ y=r \sin \alpha_0}} = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Big|_{y=0} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Решение уравнения (1.1) представляется в следующем виде

$$F(x, y) = A(x + \delta y)^{\lambda+1}. \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.1), получаем относительно  $\delta$  алгебраическое уравнение четвертого порядка (1).

$$a_{22} - 2a_{26}\delta + (2a_{12} + a_{66})\delta^2 - 2a_{16}\delta^3 + a_{11}\delta^4 = 0. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) не имеет действительных корней, что на основании положительности потенциальной энергии деформации доказано в (1).

Рассмотрим два возможных случая.

1. Когда корни уравнения (1.4)  $\delta_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) — простые.

$$\delta_2 = \bar{\delta}_1, \quad \delta_4 = \bar{\delta}_3. \quad (1.5)$$

Решение (1.1), соответствующее каждому  $\lambda$ , представим в виде суммы линейно независимых решений

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^4 A_k (x + \delta_k y)^{\lambda+1}, \quad (1.6)$$

где  $A_k$  — комплексные постоянные.

Удовлетворяя граничным условиям (1.2) на основании (1.6) для коэффициентов  $A_k$  получаем систему однородных уравнений.

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= 0; \\ \delta_1 A_1 + \delta_2 A_2 + \delta_3 A_3 + \delta_4 A_4 &= 0; \\ a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 &= 0; \\ \delta_1 a_1 A_1 + \delta_2 a_2 A_2 + \delta_3 a_3 A_3 + \delta_4 a_4 A_4 &= 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$a_k = (\cos \alpha_0 + \delta_k \sin \alpha_0)^2.$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \arg(\cos \alpha_0 + \delta_k \sin \alpha_0), \quad (k=1, 3) \\ \delta_{1,2} &= \sigma \pm i\nu; \quad \delta_{3,4} = \alpha \pm i\beta \end{aligned} \quad (1.8)$$

из условия существования нетривиального решения системы (1.8) получаем следующее уравнение относительно  $\lambda$

$$\begin{aligned} 4\nu\beta \operatorname{ch}(\lambda \ln P) + [(\sigma - \alpha)^2 + (\nu - \beta)^2] \cos \lambda(\varphi_1 + \varphi_3) - \\ - [(\sigma - \alpha)^2 + (\nu + \beta)^2] \cos \lambda(\varphi_1 - \varphi_3) = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$P = \frac{R_1}{G_1}, \quad \begin{aligned} R_1 &= [(\cos \alpha_0 + \sigma \sin \alpha_0)^2 + \nu^2 \sin^2 \alpha_0]^{1/2}, \\ G_1 &= [(\cos \alpha_0 + \alpha \sin \alpha_0)^2 + \beta^2 \sin^2 \alpha_0]^{1/2}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и двум конкретным условиям на замыкающей части контура угловой области, представляется в виде суммы собственных функций

$$F(x, y) = \sum_{(\lambda, n)} \sum_{k=1}^4 A_k (x + \delta_k y)^{\lambda+n+1}, \quad (1.10)$$

где первую сумму необходимо распространять на все корни трансцендентного уравнения (1.9), имеющие положительные действительные части, что вытекает из требования конечности накопленной удельной потенциальной энергии деформации в окрестности угловой точки.

Переходя к полярной системе координат  $(r, \varphi)$  решение (1.10) можно представить с разделенными переменными

$$F(r, \varphi) = \sum_{(\lambda, n)} r^{\lambda+n} [R^{\lambda+n+1} (A_1' \cos \lambda+\gamma + A_2' \sin \lambda+\gamma) + G^{\lambda+n+1} (A_3' \cos \lambda+\theta + A_4' \sin \lambda+\theta)], \quad (1.11)$$

где  $A_k$  — действительные постоянные,

$$R = [(\cos \varphi + \sigma \sin \varphi)^2 + \nu^2 \sin^2 \varphi]^{1/2},$$

$$G = [(\cos \varphi + \alpha \sin \varphi)^2 + \beta \sin^2 \varphi]^{1/2},$$

$$\gamma = \arg(\cos \varphi + \sigma \sin \varphi + i\nu \sin \varphi), \quad \theta = \arg(\cos \varphi + \alpha \sin \varphi + i\beta \sin \varphi).$$

Внутри рассматриваемой области  $\gamma$  и  $\theta$  изменяются в интервалах

$$0 \leq \gamma \leq \varphi_1, \quad 0 \leq \theta \leq \varphi_3.$$

2. Рассмотрим случай двукратного корня уравнения (1.4)

$$\delta = \delta_1 = \delta_3, \quad \bar{\delta} = \delta_2 = \delta_4, \quad \delta = \sigma + i\nu. \quad (2.1)$$

Решение уравнения (1.1), соответствующее каждому значению  $\lambda$  представляется в виде

$$F(x, y) = A(x + \delta y)^{\lambda+1} + B(x + \bar{\delta} y)^{\lambda+1} + C(x + \bar{\delta} y)(x + \delta y)^{\lambda} + D(x + \delta y)(x + \bar{\delta} y)^{\lambda}, \quad (2.2)$$

где  $A, B, C, D$  — комплексные постоянные.

Переходя в (2.2) от декартовых координат к полярным, имеем

$$F(r, \varphi) = (r\rho)^{\lambda+1} (A \cos \lambda+\theta + B \sin \lambda+\theta + C \cos \lambda-\theta + D \sin \lambda-\theta), \quad (2.3)$$

где  $A, B, C, D$  — действительные постоянные,  $\lambda^+ = \lambda + 1$ ,  $\lambda^- = \lambda - 1$

$$\rho = [(\cos \varphi + \sigma \sin \varphi)^2 + \nu^2 \sin^2 \varphi]^{1/2}, \quad \theta = \arg(\cos \varphi + \sigma \sin \varphi + i\nu \sin \varphi)$$

В случае изотропного материала:  $\sigma = 0$ ,  $\nu = 1$ ,  $\rho = 1$  получаем хорошо известное представление решения бигармонического уравнения (2.3).

$$F(r, \varphi) = r^{\lambda+1} (A \cos \lambda^+\varphi + B \sin \lambda^+\varphi + C \cos \lambda^-\varphi + D \sin \lambda^-\varphi).$$

Граничные условия в полярных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned}
 F|_{\varphi=0} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= 0; \\
 F|_{\varphi=\alpha_0} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\alpha_0} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.5), имеем:

$$\begin{aligned}
 A + C &= 0, \\
 \lambda^+ B + \lambda^- D &= 0, \\
 A \cos \lambda^+ \theta_1 + B \sin \lambda^+ \theta_1 + C \cos \lambda^- \theta_1 + D \sin \lambda^- \theta_1 &= 0, \\
 -A \lambda^+ \cos \lambda^+ \theta_1 + B \lambda^+ \cos \lambda^+ \theta_1 - C \lambda^- \sin \lambda^- \theta_1 + D \lambda^- \cos \lambda^- \theta_1 &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

где

$$\theta_1 = \arg(\cos \alpha_0 + \sigma \sin \alpha_0 + i \nu \sin \alpha_0).$$

Для  $\lambda$  получается уравнение

$$\lambda^2 \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \lambda \theta_1 = 0. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) идентично уравнению, соответствующему изотропному клину (3.5) с углом раствора  $\theta_1$ .

Общее решение представляется в виде ряда

$$F(r, \varphi) = \sum_{(k,n)} (r \rho)^{\lambda_n - 1} (A_n \cos \lambda_n^+ \theta + B_n \sin \lambda_n^+ \theta + C_n \cos \lambda_n^- \theta + D_n \sin \lambda_n^- \theta) \tag{2.8}$$

здесь

$$0 \leq \theta \leq \theta_1.$$

Представление функции напряжения в виде (1.11) или (2.8) дает возможность исследовать поведение напряжений в окрестности угловой точки поперечного сечения призматического анизотропного тела, находящегося в условиях плоской задачи теории упругости. Если уравнения (1.9) и (2.7) имеют корни в полосе  $0 < \operatorname{Re} \lambda < 1$  комплексной плоскости  $\lambda$  напряжения, вычисляемые по формулам

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi} = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \tag{2.9}$$

при  $r \rightarrow 0$  неограниченно возрастают. Порядок особенности равен  $1 - \operatorname{Re} \lambda_1$ , где  $\lambda_1$  — корень уравнения (1.9) или (2.7) с наименьшей действительной частью в полосе  $0 < \operatorname{Re} \lambda < 1$ .

Напряженное состояние во втором случае зависит от двух упругих констант материала. Этот случай включает в себя частный вид общей анизотропии. Отметим, что в случае общей ортотропии напряженное состояние также зависит от двух констант материала. Корни уравнения (1.5) имеют вид  $\hat{\sigma} = \pm(\sigma \pm i\nu)$ , поэтому в случае общей ортотропии характеристическое уравнение для собственного значения  $\lambda$  получается из уравнения (1.9) соответствующим подбором аргументов  $\varphi_k$  комплексных чисел  $a_k$ . В случае изотропного материала уравнения для  $\lambda$  получается из (2.8), если в нем заменить  $\theta_1$  через  $\alpha_0$ .

Порядок особенности напряжений на вершине угла с раствором  $\alpha_0$  равен порядку особенности напряжений для изотропного материала при угле, равном  $\theta_1$ .

Известно, что в решениях первой краевой задачи теории упругости изотропного тела особенность напряжений в угловых точках области имеется при углах  $\alpha_0 > \pi$  (3). Во втором случае рассмотренной выше анизотропии в зависимости от  $\delta = \sigma + i\nu$

$$\theta_1 = \arg(\cos\alpha_0 + \sigma \sin\alpha_0 + i\nu \sin\alpha_0)$$

может быть больше или меньше, чем  $\alpha_0$ , и так как при углах  $\alpha_0 > \pi$  большему углу соответствует особенность более высокого порядка, то в зависимости от анизотропии при одном и том же угле  $\alpha_0$  порядок особенности напряжений может быть выше или ниже, чем особенность напряжений, полученная в случае изотропного тела, что не согласуется с утверждением работы (4) о том, что "...наиболее слабая особенность поля напряжений имеет место в случае изотропного тела...".

Случаи  $\alpha_0 = \pi$ ,  $\alpha_0 = 2\pi$  являются предельными в том смысле, что в общем случае анизотропии приведенные углы  $\varphi_k$  в характеристических уравнениях для собственных значений стремятся к  $\pi$  и  $2\pi$ , если  $\alpha_0$  стремится к  $\pi$  и  $2\pi$ .

Уравнения (1.9) и (2.7) в этих предельных случаях примут вид

$$\sin^2 \lambda \pi = 0 \quad \text{при } \alpha_0 = \pi$$

$$\sin^2 2\lambda \pi = 0 \quad \text{при } \alpha_0 = 2\pi.$$

Следовательно, при  $\alpha_0 = \pi$  особенность напряжений отсутствует, а в случае  $\alpha_0 = 2\pi$ , когда поперечное сечение тела превращается в область с разрезом, особенность напряжений в основании разреза имеет порядок 0,5.

Вычислительный центр  
Академии наук Армянской ССР

#### Ռ. Կ. ԱՆՔՍԱՆՅԱՆ

Անիզոտրոպ մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդրի  
հավասարումների լուծումների մի դասի մասին

Աշխատանքում առաջարկվում է անկյունային տիրույթների համար անիզոտրոպ մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդրի հավասարումների լուծումների կառուցման եղանակ: Այդ հնարավորությունն իրականացվում է արտաքին ուժից ազատ կողմերով անկյունային տիրույթի դեպքում: Կառուցված սեփական ֆունկցիաների օգնությամբ հետազոտվում է լարումների վարքը պրիզմատիկ մարմնի ընդլայնական հատվածքի եզրագծի անկյունային կետում, երբ մարմնի նյութն ունի մարմնի կողմնային մակերևույթի ծնիշին ուղղահայաց առաձգական սիմետրիայի մեկ հարթություն:

Երբ լարվածային վիճակը կախված է նյութի առաձգական շորս կամ երկու հաստատուններից, ստացված են սեփական արժեքների համար հավասարումներ, որոնց լուծումները տալիս են լարումների եզակիության կարգը անկյունային կետում: Իզոտրոպ նյութի դեպքում անկյունային կետում լարումների եզակիությունների ուսումնասիրությունների հայտնի արդյունքները հնարավոր է օգտագործել անիզոտրոպության մասնավոր դեպքերի համար: Պրիզմատիկ մարմինների անկյունային կետերում հնարավոր է, որ անիզոտրոպության դեպքում լարումներն ունենան ավելի ցածր կարգի եզակիություն, քան իզոտրոպության դեպքում:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Л. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела, Гос. изд. тех.-теор. лит. М.—Л., 1950. <sup>2</sup> М. Knein, Abh. Aerodyn. Inst. Tech. Hochschule Aachen. 7, 1927. <sup>3</sup> M. L. Williams, J. Appl. Mech, 19, 526 (1952). <sup>4</sup> Д. Боджи, Труды ASME, т. 39, сер. E, № 4 (1972). <sup>5</sup> Я. С. Уфлянд, Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Изд. АН СССР, М.—Л., 1963.