ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 3

УДК 539.37

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблоян, Н. О. Гулканян

Плоская задача теории упругости для области, составленной из двух усеченных клиньев

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 29/XII 1975)

Исследованию напряженного состояния клиновидных областей посвящены работы ([1-11]) и др. В этих работах, в основном, определяется порядок особенностей напряжений в угловых точках.

В данной работе рассматривается решение первой основной плоской задачи теории упругости для X-образной области (рис. 1). Целью работы является получение контактных напряжений на отрезке O_1O_2 с выделенными особенностями и исследование влияния наличия угловой точки O_2 на характер напряжений около угловой точки O_1, или наоборот. Исследуется также влияние величины угла раствора и распределения внешних напряжений на значение коэффициента при особенности напряжений.

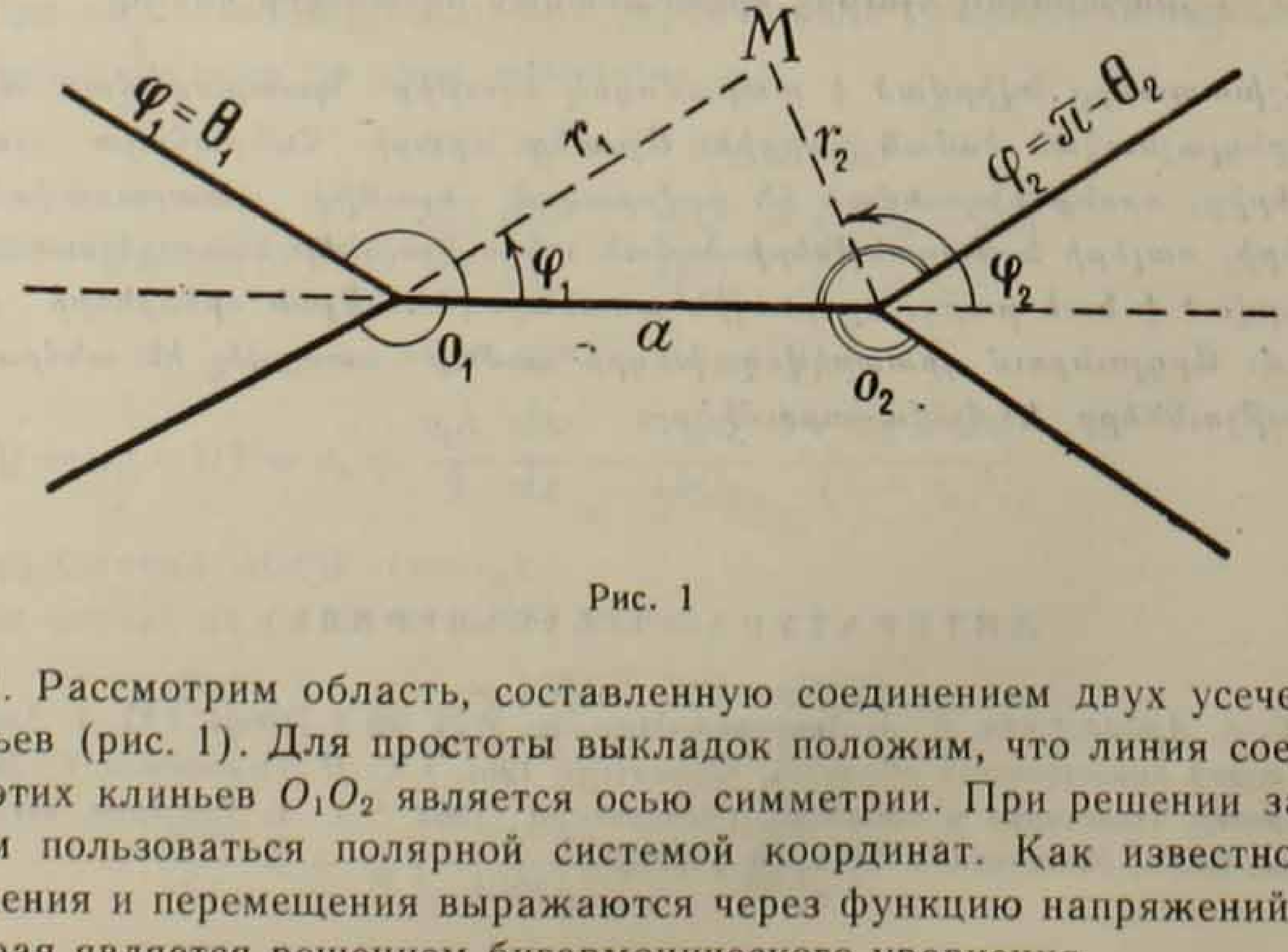

Рис. 1

1. Рассмотрим область, составленную соединением двух усеченных клиньев (рис. 1). Для простоты выкладок положим, что линия соединения этих клиньев O_1O_2 является осью симметрии. При решении задачи будем пользоваться полярной системой координат. Как известно, напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений Эри, которая является решением бигармонического уравнения

$$\Delta^2\Delta^2 f(r,\varphi)=0\left(\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \tag{1.1}$$

Если ввести преобразование Меллина для функции $f(r,\varphi)$

$$F(s,\varphi)=\int_0^\infty f(r,\varphi)\, r^{s-2}dr, \tag{1.2}$$

то для определения функции $F(s,\varphi)$ получается обыкновенное уравнение четвертого порядка

$$F^{IV}+2(s^2+1)F''+(s^2-1)^2F=0,$$

решение которого имеет вид:

$$F(s,\varphi)=A\cos(s-1)\varphi+B\sin(s-1)\varphi+C\cos(s+1)\varphi+D\sin(s+1)\varphi. \tag{1.3}$$

Функция напряжений $f(r,\varphi)$ определяется через функцию $F(s,\varphi)$ по формуле

$$f(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s,\varphi)r^{1-s}\, ds, \tag{1.4}$$

а формулы для напряжений и перемещений примут вид:

$$\sigma_\varphi(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s(s-1)F(s,\varphi)r^{-s-1}\, ds$$

$$\tau_{r\varphi}(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} sF'_\varphi(s,\varphi)r^{-s-1}\, ds$$

$$Eu_2(r,\varphi)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}[F''_{\varphi\varphi}-(s-1)(1+\nu s)F]r^{-s}\frac{ds}{s} \tag{1.5}$$

$$Ev_\varphi(r,\varphi)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left\{F'''_{\varphi\varphi\varphi}+[(s-1)^2+(1+\nu)s(s+1)]F'_\varphi\right\}.\, r^{-s}\frac{ds}{s(s+1)}.$$

Введем в рассмотрение две системы полярных координат r_1, φ_1 и r_2, φ_2 с центрами соответственно в точках O_1 и O_2.

Решение поставленной задачи ищем в виде суммы двух „местных решений", т. е. в виде

$$2\pi i f(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{2}\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}F_n(s,\varphi_n)r_n^{1-s}\, ds, \tag{1.6}$$

где

$$F_1(s, \varphi_1) = A_1(s)\cos(s-1)\varphi_1 + B_1(s)\sin(s-1)\varphi_1 + C_1(s)\cos(s+1)\varphi_1 + \\ + D_1(s)\sin(s+1)\varphi_1, \tag{1.7}$$

$$F_2(s, \varphi_2) = A_2(s)\cos(s-1)(\varphi_2 - \pi) + B_2(s)\sin(s-1)(\varphi_2 - \pi) + \\ + C_2(s)\cos(s+1)(\varphi_2 - \pi) + D_2(s)\sin(s+1)(\varphi_2 - \pi).$$

В силу симметрии на отрезке $O_1O_2(\varphi_1=0,\ \varphi_2=\pi)$ должны выполняться условия:

$$\tau_{r_1\varphi_1}(r_1, 0)=0, \quad \tau_{r_2\varphi_2}(r_2, \pi)=0$$

$$v_{\varphi_1}(r, 0)=0, \quad v_{\varphi_2}(r_2, \pi)=0, \tag{1.8}$$

откуда в силу (1.5) и (1.7)

$$B_j(s) = D_j(s) = 0 \quad (j = 1,2)$$

2. Рассмотрим случай, когда на границе области заданы следующие условия:

$$\sigma_\varphi(r_1, \Theta_1)=f_1(r_1), \quad \sigma_\varphi^{(2)}(r_2, \pi-\Theta_2)=f_2(r_2),$$

$$\tau^{(1)}_{r_1\varphi_1}(r_1, \Theta_1)=g_1(r_1), \quad \tau^{(2)}_{r_2\varphi_2}(r_2, \pi-\Theta_2)=g_2(r_2) \tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем индексом (1) помечены напряжения и перемещения, записанные в системе координат r_1, φ_1, а индексом (2) — в системе координат r_2, φ_2.

Подставляя выражение (1.6) в (1.1), получаем формулы для определения напряжений $\sigma_\varphi^{(n)}$ и $\tau_{r\varphi}^{(n)}$

$$2\pi i\sigma_\varphi^{(n)}(r_n, \varphi_n) = \int\limits_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty} s(s-1)F_n(s, \varphi_n)r_n^{-s-1}\,ds + \frac{\partial^2}{\partial r_n^2}\int\limits_{c_p-i\infty}^{c_p+i\infty} F_p(s, \varphi_p)r_p^{1-s}\,ds, \tag{2.2}$$

$$2\pi i\tau_{r\varphi}^{(n)}(r_n, \varphi_n) = \int\limits_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty} s.\ \frac{\partial F_n(s, \varphi_n)}{\partial \varphi_n}\, r_n^{-s-1}ds -$$

$$-\frac{\partial}{\partial r_n}\left[\frac{1}{r_n}\frac{\partial}{\partial \varphi_n}\int\limits_{c_p-i\infty}^{c_p+i\infty} F_p(s, \varphi_p)\ r_p^{1-s}\,ds\right]$$

$$(n = 1,2;\ n + p = 3)$$

Удовлетворим граничным условиям (2.1) и полученные выражения проинтегрируем от нуля до ∞, предварительно умножив их на $\frac{r_n^\xi dr_n}{2\pi i}$. При этом после некоторых преобразований получим систему интегральных уравнений:

$$X_n(\xi) + \int\limits_{c_p-i\infty}^{c_p+i\infty} [K_{n,1}(\xi, s)X_p(s) + K_{n,2}(\xi, s)Y_p(s)]ds = \bar{f}_n(\xi) \tag{2.3}$$

$$Y_n(\xi) + \int\limits_{c_p-i\infty}^{c_p+i\infty} [K_{n+2,1}(\xi, s)X_p(s) + K_{n+2,2}(\xi, s)Y_p(s)]ds = \bar{g}_n(\xi),$$

где

$$\bar{f}_n(\xi) = a^{-\xi}\int\limits_0^\infty f_n(r_n)r_n^\xi dr_n, \quad \bar{g}_n(\xi) = a^{-\xi}\int\limits_0^\infty g_n(r_n)r_n^\xi dr_n.$$

$$K_{jn}(\xi, s) = \frac{\mathrm{B}(\xi+1, s-\xi)}{2\pi i\ \Delta_k(s)} k_{jn}(\xi, s, \Theta_1, \Theta_2),$$

$[j=1, 2, 3, 4;\ n=1, 2;\ k=1, 2;\ p=1, 2;\ j+k$ — нечетное число; $p+n=3]$

$$k_{11}(\xi, s, \Theta_1, \Theta_2) = (s+1)\cos\beta_1(\xi-1)\sin(s+1)\Theta_2 - (s-\xi)\cos\beta_1(\xi-1)\times$$
$$\times\sin(s-1)\Theta_2 - (\xi-1)\cos\beta_1(\xi+1)\sin(\xi-1)\Theta_2, \tag{2.4}$$

$$k_{12}(\xi, s, \Theta_1, \Theta_2) = (1-s)\cos\beta_1(\xi-1)\cos(s+1)\Theta_2 + (s-\xi)\times$$
$$\times\cos\beta_1(\xi-1)\cos(s-1)\Theta_2 + (\xi-1)\cos\beta_1(\xi+1)\cos(s-1)\Theta_2$$

$$\Delta_k(s) = \sin 2s\Theta_k + s\cdot\sin 2\Theta_k,$$

$$k_{2n}(\xi, s, \Theta_1, \Theta_2) = (-1)^{n-1} k_{1n}(\xi, s, \Theta_2, \Theta_1),$$

$$k_{4n}(\xi, s, \Theta_1, \Theta_2) = (-1)^n k_{3n}(\xi, s, \Theta_2, \Theta_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_j} k_{jn}(\xi, s, \Theta_1, \Theta_2) = (-1)^j(\xi-1)k_{j+2,n}(\xi, s, \Theta_1, \Theta_2),$$

$$[j, n = 1, 2;\ \beta_j = \pi - \Theta_j]$$

Исследование показывает, что система интегральных уравнений регулярна, если $\Theta_n > \frac{\pi}{2}$.

Коэффициенты $A_n(s)$ и $C_n(s)$ выражаются через неизвестные $X_n(s)$ и $Y_n(s)$ следующим образом:

$$a^{-s}\Delta_n A_n = \frac{(s+1)X_n}{s(s-1)}\sin(s+1)\Theta_n - (-1)^n\frac{Y_n}{s}\cos(s+1)\Theta_n,$$

$$a^{-s}\Delta_n C_n = -\frac{X_n}{s}\sin(s-1)\Theta_n + (-1)^n\frac{Y_n}{s}\cos(s-1)\Theta_n.$$

В частном случае, когда $\Theta_1 = \Theta_2$, интегральные уравнения можно записать в виде:

$$U_n(\xi) - (-1)^n\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}[K_{11}(\xi, s)U_n(s) - K_{12}(\xi, s)V_n(s)]ds =$$

$$=\frac{1}{2}[\bar{f}_1(\xi)-(-1)^n\bar{f}_2(\xi)],$$

$$V_n(\xi)-(-1)^n\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}[K_{31}(\xi, s)\,U_n(s)-K_{32}(\xi, s)V_n(s)]\,ds=$$

$$=\frac{1}{2}[\bar{g}_1(\xi)+(-1)^n\,\bar{g}_2(\xi)],$$

$$(n=1, 2)$$

где

$$2\,U_n=X_1-(-)^n X_2,\ 2\,V_n=Y_1+(-1)^n\,Y_2$$

$$\Delta_1(s)=\Delta_2(s)=\sin 2s\Theta+s\sin 2\Theta.$$

Если же при этом $\Theta_1=\Theta_2=\pi$, то эти уравнения упрощаются и принимают вид:

$$U_n(\xi)=(-1)^{n-1}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}K(\xi, s)U_n(s)ds+\frac{1}{2}[\bar{f}_1(\xi)-(-1)^n\bar{f}_2(\xi)],$$

$$V_n(\xi)=\frac{1}{2}[\bar{g}_1(\xi)+(-1)^n\bar{g}_2(\xi)],\ K(\xi, s)=\frac{B(\xi+1, s-\xi)}{2\pi i\cos s\pi,}.$$

Отметим, что полученные интегральные уравнения являются сингулярными, так как ядра содержат функцию $B(\xi+1, s-\xi)$. Чтобы эти системы интегральных уравнений свести к регулярным интегральным уравнениям Фредгольма, исключим из уравнений (2.3) X_1, Y_1 (или X_2, Y_2), тогда получим две независимые системы уравнений:

$$X_n(\xi)[1-Q_{11}^{(n)}(\xi)]-Y_n(\xi)\,Q_{12}^{(n)}(\xi)=$$

$$=\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}[P_{11}^{(n)}(\xi, z)X_n(z)+P_{12}^{(n)}(\xi, z)Y_n(z)]\,dz+F_n(\xi), \tag{2.5}$$

$$-X_n(\xi)\,Q_{21}^{(n)}(\xi)+Y_n(\xi)[1-Q_{22}^{(n)}(\xi)]=$$

$$=\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}[P_{21}^{(n)}(\xi, z)X_n(z)+P_{22}^{(n)}(\xi, z)\,Y_n(z)]\,dz+G_n(z)$$

где введены следующие обозначения:

$$P_{1,q}^{(n)}(\xi, z)=-\frac{\Gamma(\xi+1)}{4\pi^2\Gamma(z+1)\Delta_n(z)}\int_{c_{3-n}-i\infty}^{c_{3-n}+i\infty}\frac{\Gamma(s-\xi)\Gamma(z-s)}{\Delta_p(s)}\times$$

$$\times [k_{n,1}(\xi, s)\ k_{3-n,q}(s, z) + k_{n,2}(\xi, s)\ k_{5-n,q}(s, z)]\, ds,$$

$$P_{2,q}^{(n)}(\xi, z) = -\frac{\Gamma(\xi+1)}{4\pi^2\Gamma(z+1)\Delta_n(z)} \int\limits_{c_{3-n}-i\infty}^{c_{3-n}+i\infty} \frac{\Gamma(s-\xi)\Gamma(z-s)}{\Delta_p(s)} \times$$

$$\times [k_{2+n,1}(\xi, s) k_{3-n,q}(s, z) + k_{2+n,2}(\xi, s) k_{5-n,q}(s, z)]\, ds$$

$$(n+p - \text{нечетно};\quad q;\ n;\ p=1,2)$$

$$4\Delta_1(\xi)\Delta_2(\xi) Q_{1,q}^{(n)}(\xi) = k_{n,1}(\xi,\xi)\ k_{3-n,q}(\xi, \xi) + k_{n,2}(\xi, \xi)\ k_{5-n,q}(\xi, \xi),$$

$$4\Delta_1(\xi)\Delta_2(\xi) Q_{2,q}^{(n)}(\xi) = k_{2+n,1}(\xi, \xi)\ k_{3-n,q}(\xi, \xi) + k_{2+n,2}(\xi, \xi)\ k_{5-n,q}(\xi, \xi),$$

$$F_n(\xi) = \bar{f}_n(\xi) - \int\limits_{c_{3-n}-i\infty}^{c_{3-n}+i\infty} [K_{n,1}(\xi, s)\, \bar{f}_{3-n}(s) + K_{n,2}(\xi, s)\, \bar{g}_{3-n}(s)]\, ds,$$

$$G_n(s) = \bar{g}_n(s) - \int\limits_{c_{3-n}-i\infty}^{c_{3-n}+i\infty} [K_{2+n,1}(\xi, s)\, \bar{f}_{3-n}(s) +$$

$$+ K_{2+n,2}(\xi, s)\, \bar{g}_{3-n}(s)]\, ds \quad (n=1,2)$$

При получении системы (2.5) была использована формула перестановки сингулярных интегралов (11,12)

$$\int\limits_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} K_1(\xi,s)\, ds \int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} K_2(s,z)\, Z(z) dz = \frac{k_1(\xi, \xi)\, k_2(\xi, \xi)\, Z(\xi)}{4\Delta_1(\xi)\,\Delta_2(\xi)} +$$

$$+ \int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} Z(z) dz \int\limits_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} K_1(\xi, s)\ K_2(s, z) ds,$$

где

$$K_n(\xi, s) = \frac{B(\xi+1, s-\xi)}{2\pi i \Delta_{3-n}(s)} k_n(\xi, s).$$

3. После решения интегральных уравнений контактное напряжение на линии $O_1 O_2$ определится по формуле:

$$2\pi i \sigma_\varphi^1 = \sum_{n=1}^{2} \int\limits_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty} \frac{a^s r_n^{-s-1}}{\Delta_n(s)} \Big\{ [(s+1) \sin(s+1)\,\Theta_n - (s-1) \sin(s-1)\,\Theta_n] \times$$

$$\times X_n(s) + (-1)^n (s-1) [\cos(s-1)\,\Theta_n - \cos(s+1)\,\Theta_n] Y_n(s) \Big\}\, ds. \qquad (2.6)$$

Из условия интегрируемости контактных напряжений следует, что $-1+\varepsilon<c<0$, $\varepsilon>0$.

Из этой формулы видно, что при вычислении интегралов с помощью вычетов контактные напряжения получим в виде ряда по степеням $\left(\frac{r_n}{a}\right)$. Так как на линии контакта $a>r$, то при вычислении интегралов (2.6) с помощью вычетов за контур интегрирования следует принять отрезок прямой $s=c_n+iy$ $(-R\leqslant y\leqslant R)$ и полуокружность

$$s=c_n+Re^{i\varphi}\quad \left(\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2};\quad R\to\infty\right).$$

Из интегральных уравнений нетрудно показать, что действительная часть первого корня s_1 $(\operatorname{Re}s_1>0)$ $\Delta_n(s)$ меньше действительной части первого полюса функций $X_n(s)$ и $Y_n(s)$ (полюсы этих функций совпадают). Поэтому главная часть контактного напряжения $\sigma_\varphi^{(1)}(r,0)$ в точках $r_n=0$ имеет вид:

$$\bar{\sigma}_r^{(1)}(r_n,0)=\frac{a^{-s_1}r_n^{\,s_1-1}}{\Delta_n'(-s_1)}\{[(s_1-1)\sin(s_1-)\Theta_n-$$

$$-(s_1+1)\sin(s_1+1)\Theta_n]X_n(-s_1)-(-1)^n(s_1+1)[\cos(s_1+1)\Theta_n-$$

$$-\cos(s_1-1)\Theta_n]Y_n(-s_1)\}$$

Для случая $\Theta_n>\frac{\pi}{2}$ s_1 будет действительным.

Аналогичным образом может быть рассмотрена та же задача, когда материалы составляющих клиньев различные.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ն. Օ. ԳՈՒԼՔԱՆՅԱՆ

Առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը երկու հատած սեպերից բաղկացած տիրույթի համար

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը X-աձև տիրույթի համար, երբ տիրույթի եզրերում տրված են լարումները։

Խնդրի լուծումը ներկայացված է որպես երկու տեղական լուծումների գումար, որոնցից յուրաքանչյուրը փնտրվում է Մելինի ինտեգրալների տեսքով։

Բավարարելով եզրային պայմաններին, անհայտ ֆունկցիաների համար ստացվել են սկզբում սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմ, որը հետագայում բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի։ Ցույց է տրվում, որ վերջին սիստեմը ռեգուլյար է, եթե $\Theta_1+\Theta_2>\pi$.

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Я. С. Уфлянд*, Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. «Наука», Л., 1968. [2] *О. К. Аксентян*, ПММ, т. 31, вып. 1 (1967). [3] *И. М. Ворович*, III Всесоюзный съезд по теор. и прикл. механ. Аннотации докладов, М., 1966. [4] *I. Dunders*, J. of compos. Mat., v. 1, 1967. [5] *И. Дандерс*, Прикл. мех., Тр. ASME, т. 36, серия Е, №3 (1969). [6] *Д. Б. Боджи*, Прикл. мех., Тр. ASME, т. 35, серия Е, №2 (1968). [7] *К. С., Чобанян, Р. К. Алексанян*, Известия АН Арм. ССР, Механика, т. XXIУ, №3, (1971). [8] *Р. К. Алексанян*, Известия АН Арм. ССР, Механика, т. XXIУ, №4 (1971). [9] *V. L. Hein, F. Erdogan* Int. J. Fract. Mech., v. 7, N 3 (1971). [10] *M. L. Williams*, J. of Appl. Mech., v. 19, N 4 (1952). [11] *R. A. Westmann*, Int. J. Engng. Sci., v. 13, N 4 (1975). [12] *Ф. Д. Гахов*, Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963. [13] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их применения к математической физике, „Наука", М., 1968.