

УДК 518.5 : 681.3

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Азатян, А. А. Баласанян

Программная реализация алгоритма для перечисления
всех неупорядоченных разбиений всякого целого n

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ф. Т. Саркисяном 5/V 1976)

Проблематичность многих задач теоретической и прикладной комбинаторики, связанная с большими мощностями множеств исследуемых комбинаторных объектов, обуславливает необходимость конструирования специализированных алгоритмов и программ. В частности, программные реализации алгоритмов для перечисления элементов полных множеств неупорядоченных разбиений ⁽¹⁾ имеют приложение как в проблематике самой теории разбиений, так и при решении многочисленных прикладных задач.

Программа для перечисления элементов полного множества неупорядоченных разбиений всякого целого n основана на алгоритме, описанном в работе ⁽²⁾ (алгоритм AS_n). Основными достоинствами алгоритма AS_n являются простота перечислительного процесса и древоподобность структуры, дающие возможность исследования и использования структурных особенностей полных множеств неупорядоченных разбиений $\{S_n\}$ при достаточно простых программных реализациях, особенно при программировании для многопроцессорных систем.

Реализация алгоритма AS_n на машинах семейства ЕС/ЭВМ показала, что для однопроцессорных реализаций возможна модификация алгоритма AS_n (алгоритм AS'_n) в направлении дальнейшего упрощения перечислительного процесса и уменьшения объема используемой оперативной памяти.

Каждый треугольник, перечисляемый в соответствии с алгоритмом AS'_n , структурно разбивается на два подмножества: множество чисел, отличных от единиц $\{\bar{1}\}$ и составляющих вертикальный катет, и множество единиц $\{1\}$, которые собственно и образуют треугольник (рис. 1). Вертикальный катет каждого треугольника состоит из слоев, число которых равно номеру той колонки, которой принадлежит треугольник. При переходе от каждого треугольника к следующему в пределах колонки изменяются только элементы, принадлежащие некото-

рому числу первых слоев катета, и соответственно изменяется количество единиц. Прежде, чем будет затронут какой-либо i -ый слой в пределах данной колонки, изменяются во всех возможных вариантах все слои с номерами: $1, 2, \dots, i-1$. В связи с этим вводится понятие «глубины треугольника» в качестве величины, соответствующей числу слоев, которые изменяются при переходе от треугольника к треугольнику. Очевидно, что эта величина ограничена сверху номером колонки (рис. 1).

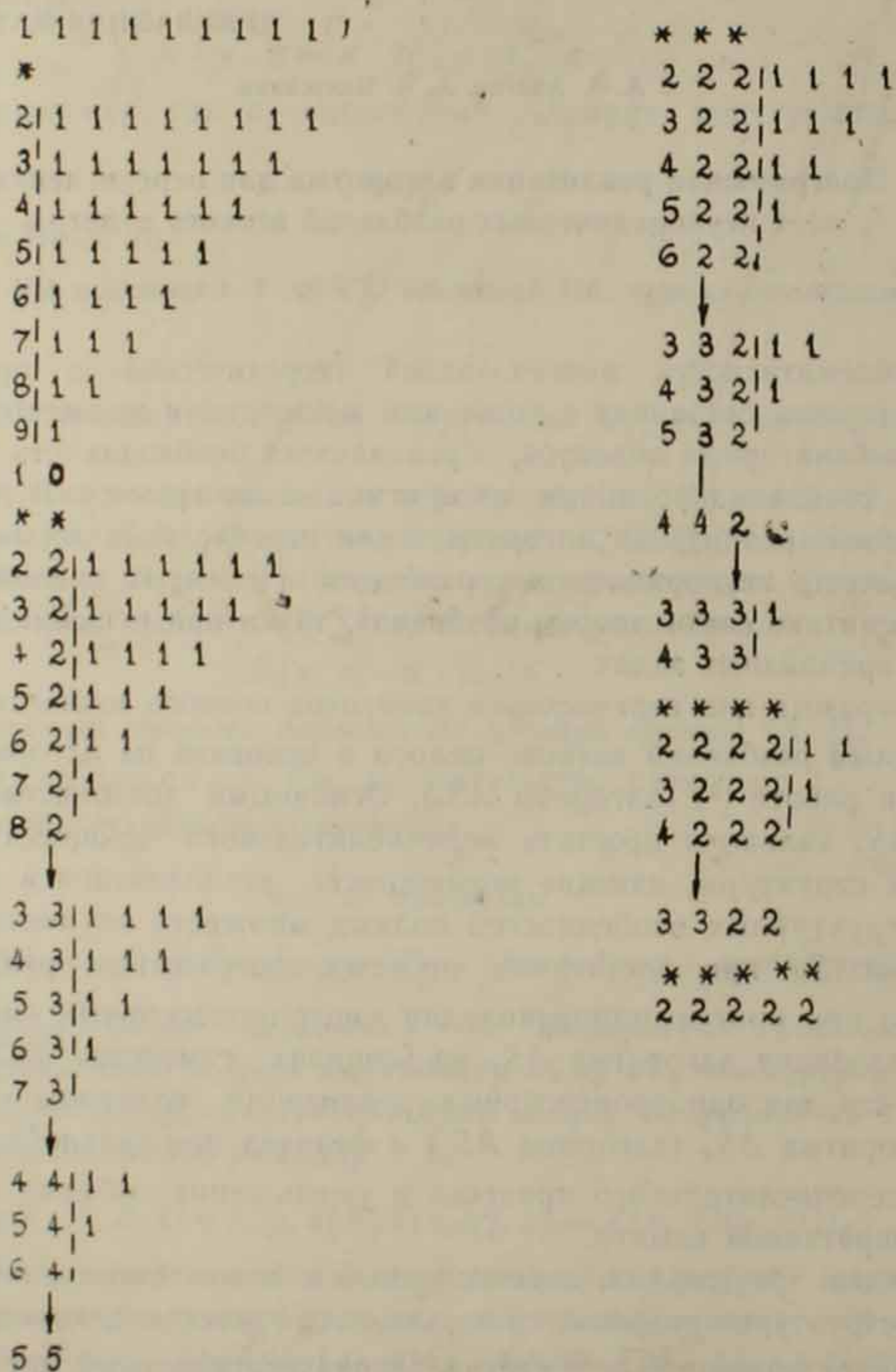


Рис. 1. Структура алгоритма AS'_{10} . Множества $\overline{1}$ и $\{1\}$ отделены пунктиром, колонки отмечены звездочками, причем число звездочек соответствует номеру колонки

Алгоритм AS'_n дает возможность генерировать первую строку каждого следующего в колонке треугольника из первой строки предыдущего, в отличие от алгоритма AS_n , где при генерировании каждого нового треугольника требуется обращение к некоторой строке одного из треугольников, сгенерированных на предыдущем этапе (рис. 1).

Алгоритм AS'_n описывается следующим образом.

1. Начать процесс разбиений, сопоставив числу n последовательность из n единиц (первоначальное разбиение).

2. Задать в качестве номера колонки k число 0.

3. Увеличить значение k на единицу.

4. Сравнить значение k , полученное в 3. с $n-k$; если $k > n-k$, то перейти к 14.; если $k \leq n-k$, то записать k в качестве номера очередной колонки.

5. Записать в качестве первой строки треугольника (первой строки колонки) последовательность, состоящую из k двоек и $n-2k$ единиц ($n-k=N$).

6. Проверить, есть ли в данной j -ой строке треугольника ($j=1, 2, \dots$) единицы ($N-k=0?$); если есть, то перейти к 7.; если нет, то придать i значение 2 и перейти к 8.

7. Из последовательности, записанной в j -ой строке, построить последовательность, записываемую в $(j+1)$ -ой строке, увеличив значение 1-го элемента ($i=1$) на единицу и отбросив последний ($i=N$) элемент. Перейти к 6.

8. Сравнить i с k ; если $i > k$, то перейти к 3.; если $i \leq k$, то перейти к 9.

9. Увеличить значение i -ого элемента ($i=2, 3, \dots, k$) данной строки на единицу и запомнить полученное значение в качестве возможного значения 1-го, 2-ого, \dots , i -ого элементов новой строки:

10. Умножить полученное в 9. число на i и к полученному произведению прибавить значения $(i+1)$ -го, $(i+2)$ -го, \dots , k -го элементов данной строки.

11. Полученную в 10. сумму S сравнить с n ; если $S > n$, то увеличить i на единицу и перейти к 8.; если $S \leq n$, то перейти к 12.

12. Записать—в качестве 1-го, 2-го \dots , i -го элементов нового треугольника значение, полученное в 9. в качестве $(i+1)$ -го, $(i+2)$ -го, \dots , k -го элементов значения $(i+1)$ -го, $(i+2)$ -го, \dots , k -го элементов последней строки предыдущего треугольника; в качестве $(k+1)$ -го, $(k+2)$ -го, \dots , N -го элементов единицы ($N=k+n-S$).

13. Принять $j=1$ и перейти к 6.

14. Закончить процесс разбиений.

Программа составлена на языке Ассемблер⁽³⁾ для машин семейства ЕС/ЭВМ с операционной системой ДОС/ЕС и отлажена на машине ЕС-1030. С учетом требований большинства прикладных задач и исходя из производительности машины ЕС—1030 число n ограничивается следующим образом $1 \leq n \leq 99$, хотя нет принципиальных ограниче-

ний для использования программы при $n > 99$. Объем программы не зависит от n и требует оперативной памяти в 1330 байтов. В программу включена подпрограмма подсчета времени перечисления элементов полного множества $\{S_n\}$, объем которой составляет 194 байта.

Применение ДОС/ЕС дает возможность загружать программу в память в любой момент рабочего времени.

Программа имеет возможность многократного перечисления элементов полных множеств $\{S_n\}$ с заданием числа C циклов повторе-

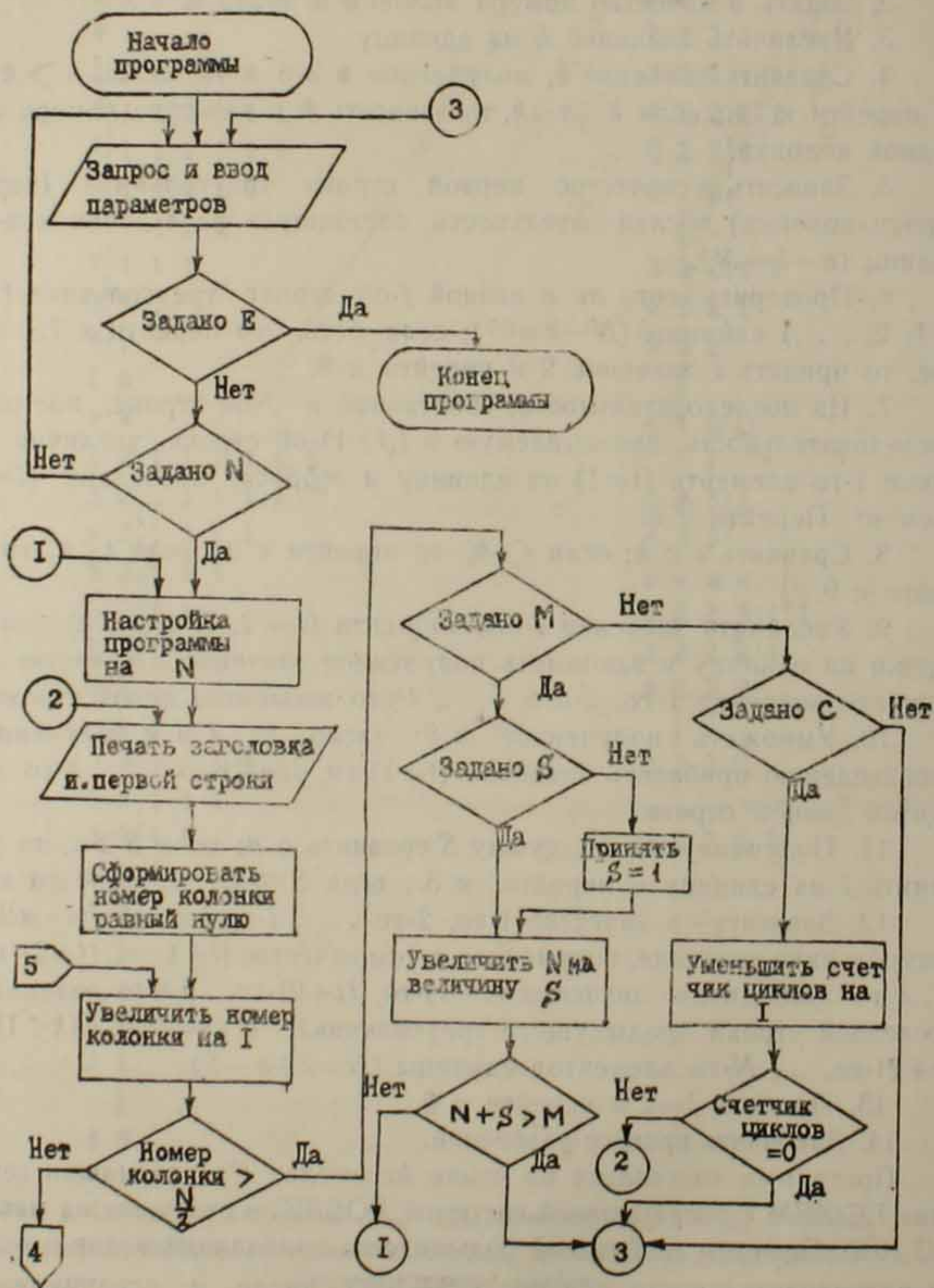


Рис. 2. Блок-схема программы (продолжение см. на рис. 3)

ния. Программа предусматривает также автоматические переходы (с заданием шага S перехода) от одного n к другому ($0 \leq S \leq 9$) вплоть до задаваемого верхнего предела M . Программа выдает на пишущую машинку запрос о параметрах (N, M, S, C), которые в различных сочетаниях дают возможность задания различных режимов работы.

Блок-схема программы показана на рис. 2 и 3.

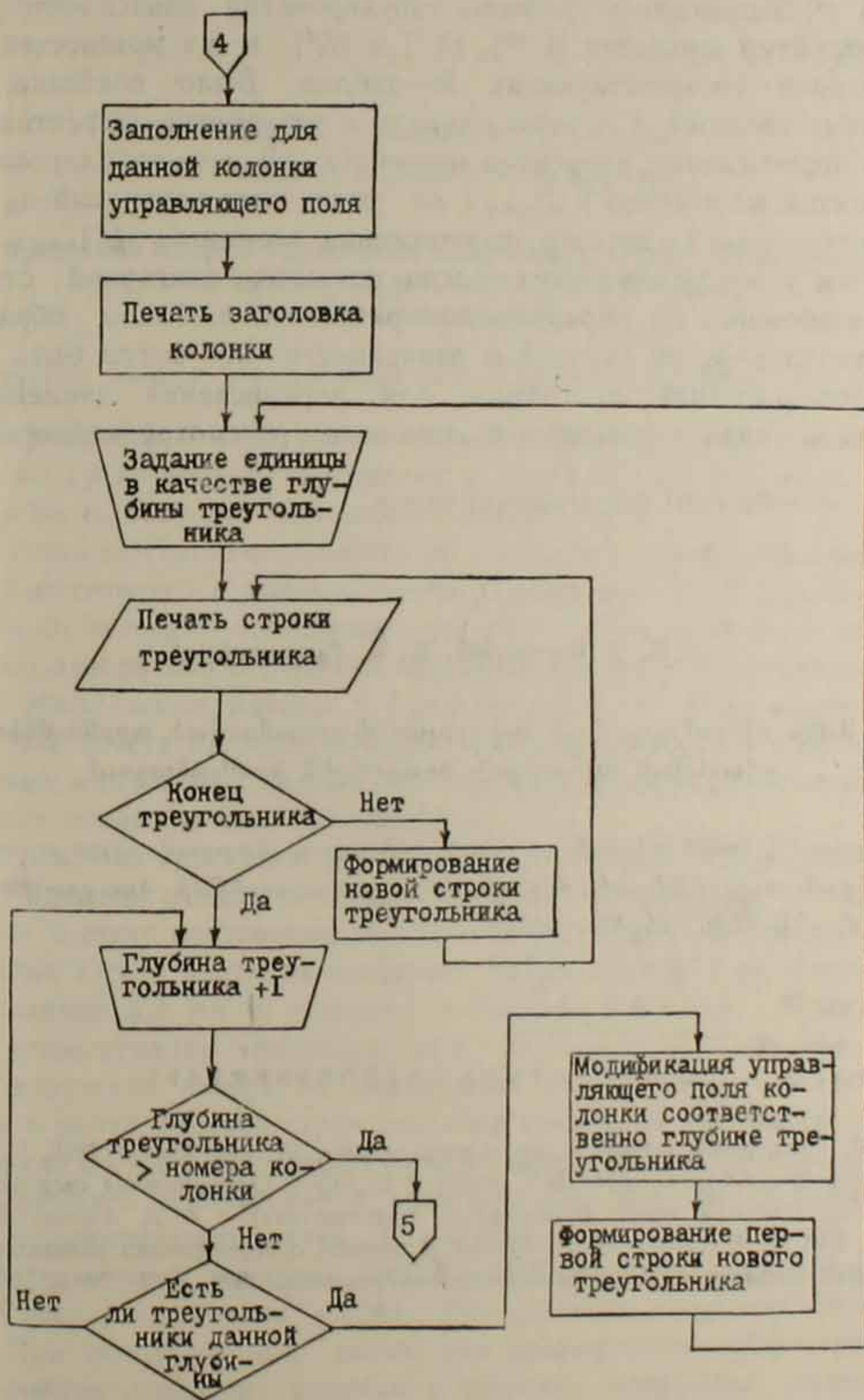


Рис. 3. Продолжение блок схемы программы

Контрольными тестовыми задачами являлись задачи по перечислению элементов полных множеств $\{S_n\}$ неупорядоченных разбиений при $n = 15, 20, 25, 30, 35$, время перечисления для которых составило соответственно 6, 7, 11, 18, 40 сек. (без вывода на печать) и 0,53; 1,50; 4,50; 12,55; 33,00 мин (с выводом на печать).

Программа отлаживалась на машине ЕС-1030, результаты решения задач сравнивались с теоретически ожидаемыми и полностью совпали с ними.

В (4) выдвигались проблема табулирования зависимостей списочных структур множеств $\{U^m\}$, $\{K^t\}$ и $\{R^t\}$ и их мощностей от распределений соответствующих m -таблиц. Было показано, что эта проблема сводится в первую очередь к разработке эффективных методов перечисления элементов множеств $\{U\}$ и к табулированию зависимостей мощностей $|\{U\}_{n,k,q}|$ от различных значений a_k и b_q . В (5) дается один из методов перечисления элементов $\{U\}_{n,k,q}$. Однако с ростом n все усложняется задача создания списочной структуры всех возможных неупорядоченных разбиений n . Таким образом, задача табулирования указанной зависимости не могла быть решена без использования программы для перечисления элементов $\{S_n\}$. Теперь эта задача решается с помощью рассмотренной программы.

Ереванский НИИ математических машин

Ա. Հ. Ազատյան, Ա. Ա. Բալասանյան

Ամեն մի ամբողջական n -ի բոլոր չկարգավորված արոհումների
թվարկման ալգորիթմի ծրագրային իրականացում

Տրվում է ամեն մի ամբողջական n -ի բոլոր չկարգավորված արոհումների
թվարկման ալգորիթմ: Նկարագրվում է այդ ալգորիթմի ծրագրային իրականացումը
ԵՍ-1030 մեքենայում:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ М. Холл, Комбинаторика, пер. с англ., «Мир», М., стр. 45—58, 1972. ² А. А. Азатян, ДАН Арм. ССР, т. LXII, № 2, (1976). ³ ЕС/ЭВМ. Операционная система ДОС/ЕС Ассемблер. Описание языка (Информация пользователя). ⁴ А. А. Азатян, ДАН Арм. ССР, т. LVI, № 4 (1973). ⁵ А. А. Азатян, К вопросу о перечислении элементов полного множества ассоциаций $\{U\}$. Депонированная рукопись, 1974, РИР, № 3, 1975, 3—697.