ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 5

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. С. Заргарян

Решение основной смешанной задачи плоской теории упругости для односвязных областей с углами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 2/VI 1976)

Настоящая статья посвящена решению основной смешанной задачи плоской теории упругости для односвязной области, граница которой имеет угловые точки. Основная смешанная задача для областей с гладкой границей решена Д. И. Шерманом (1). В работах (2,3) рассмотрены решения основной смешанной задачи для полукруговой области.

В приводимом ниже решении, ограничиваясь для простоты случаем, когда упругое тело занимает на плоскости конечную область, предлагается метод решения основной смешанной задачи для односвязной области с углами, основанный на непосредственном выделении локальных решений, возникающих в окрестности угловых точек контура.

В работах автора (4,5) этот метод был применен к решению плоской задачи теории упругости для односвязных областей с углами при заданных на границе напряжениях или смещениях.

1. Пусть конечная односвязная область S ограничена кусочно-гладким замкнутым контуром L, имеющим m угловых точек a_j. Положим, что граница области имеет $2m_1$ угловых точек, в которых меняются граничные условия, m_2 угловых точек, расположенных на участках границы, на которых заданы напряжения, и m_3 угловых точек, расположенных на участках границы, на которых заданы перемещения $(m=2m_1+m_2+m_3)$.

Примем, что на участках $L'_{2j-1}=a_{2j-1}a_{2j}$ $(j=1, 2, \ldots, m_1)$, не имеющих общих концов, положительные напряжения которых совпадают с положительным направлением обхода контура L, заданы напряжения, а на участках $L''_{2j}=a_{2j}a_{2j+1}$, причем, $a_{2m_1+1}=a_1$, заданы перемещения. Совокупность дуг L'_{2j-1} обозначим через L', а совокупность дуг L''_{2j}—через L''.

Как известно (6), граничные условия задачи записываются так

$$\varphi^*(t) + t\overline{\varphi^{*\prime}(t)} + \overline{\psi^*(t)} = f(t) + C(t) \quad \text{при } t \in L' \tag{1.1}$$

$$\varkappa\varphi^*(t) - t\overline{\varphi^{*\prime}(t)} - \overline{\psi^*(t)} = g(t) \quad \text{при } t \in L'' \tag{1.2}$$

Здесь

$$f(t) = i \int_{a_{2j-1}}^{t} (X_n + iY_n) ds, \quad \text{при} \quad t \in L'_{2j-1}$$

$$g(t) = 2\mu(u + iv), \quad \text{при} \quad t \in L''_{2j}$$

$$C(t) = C_{2j-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots m_1). \tag{1.3}$$

Будем полагать, что $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условию Гельдера соответственно на каждом из участков L'_{2j-1} и L''_{2j}.

На основании (4.5), для выделения локальных решений, возникающих в окрестности угловых точек контура, функции $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ представим в виде

$$\varphi^*(z) = \varphi(z) + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(z),$$

$$\psi^*(z) = \psi(z) + \sum_{j=1}^{m} [\psi_j(z) - \bar{a}_j \varphi'_j(z)]. \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.1) и (1.2), получаем

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + C(t) - \sum_{j=1}^{m} [\varphi_j(t) + (t - a_j)\overline{\varphi'_j(t)} + \overline{\psi_j(t)}]$$

$$\text{при } t \in L' \tag{1.5}$$

$$\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = g(t) - \sum_{j=1}^{m} [\varkappa\varphi_j(t) - (t - a_j)\overline{\varphi'_j(t)} - \overline{\psi_j(t)}]$$

$$\text{при } t \in L'' \tag{1.6}$$

где

$$\varphi_j(z) = \varphi_{1j}(z - a_j) + \bar{\varphi}_{2j}(z - a_j),$$

$$\psi_j(z) = \chi'_{1j}(z - a_j) + \bar{\chi}_{2j}(z - a_j). \tag{1.7}$$

Голоморфные функции φ_{1j}, φ_{2j}, χ_{1j} и χ_{2j} образуют комплексную бигармоническую функцию Гурса

$$U_j(x, y) = \chi_{1j}(z - a_j) + \chi_{2j}(\bar{z} - \bar{a}_j) + (\bar{z} - \bar{a}_j)\varphi_{1j}(z - a_j) + (z - a_j)\varphi_{2j}(\bar{z} - \bar{a}_j).$$

которая при значениях

$$\chi_{1j}(z - a_j) = d_{1j}(z - a_j)^{\lambda_j + 1}, \quad \chi_{2j}(z - a_j) = d_{2j}(z - a_j)^{\lambda_j + 1},$$

$$\varphi_{1j}(z - a_j) = d_{3j}(z - a_j)^{\lambda_j}, \quad \varphi_{2j}(z - a_j) = d_{4j}(z - a_j)^{\lambda_j} \text{ и } z - a_j = r_j e^{i\theta_j} \tag{1.8}$$

имеет следующее представление в полярных координатах:

$$U_j(r^j,\theta_j)=r_j^{\lambda_j+1}[b_{1j}\sin(\lambda_j+1)\theta_j+b_{2j}\cos(\lambda_j+1)\theta_j+b_{3j}\sin(\lambda_j-1)\theta_j+$$
$$+b_{4j}\cos(\lambda_j-1)\theta_j], \tag{1.9}$$

где

$$b_{1j}=i(d_{1j}-d_{2j}),\ b_{2j}=d_{1j}+d_{2j},\ b_{3j}=i(d_{3j}-d_{4j}),\ b_{4j}=d_{3j}+d_{4j} \tag{1.10}$$

i-мнимая единица.

Следуя Вильямсу [7], удовлетворяя с помощью (1.9) однородным условиям на прямолинейных сторонах сектора $\theta_j=\alpha_j$ и $\theta_j=\beta_j$, образованного касательными, проведенными к контуру в точке a_j так, что угол β_j-α_j представлял угол области в рассматриваемой угловой точке контура, получаем систему четырех однородных уравнений для определения коэффициентов b_{kj} ($k=1,2,3,4$; $j=1,2,...m$). Полагая, что поведение напряжений и смещений в угловой точке a_j совпадает с поведением этих же величин в окрестности вершины вышеуказанного сектора, как это имеет место также при изгибе тонких плит [8], комплексное число λ_j будем определять как корень с наименьшей положительной действительной частью характеристического уравнения, получающегося из условия существования нетривиальных решений однородной системы для определения коэффициентов b_{kj}.

Как известно [7], λ_j будет корнем одного из уравнений

$$\sin^2\lambda_j(\beta_j-\alpha_j)=\lambda_j^2\sin^2(\beta_j-\alpha_j), \tag{1.11}$$

$$\varkappa^2\sin^2\lambda_j(\beta_j-\alpha_j)=\lambda_j^2\sin^2(\beta_j-\alpha_j), \tag{1.12}$$

$$4\lambda_j^2\sin^2(\beta_j-\alpha_j)+4\varkappa\sin^2\lambda_j(\beta_j-\alpha_j)-(\varkappa+1)^2=0 \tag{1.13}$$

соответственно, в случаях, когда на сторонах угла заданы напряжения, смещения или вершина угла является точкой смены граничных условий.

Учитывая, что во всех трех случаях ранг матриц вышеуказанных однородных систем равен трем, нетривиальные решения систем имеют вид:

$$b_{1j}=X_{1j}b_{4j},\ b_{2j}=X_{2j}b_{4j},\ b_{3j}=X_{3j}b_{4j} \tag{1.14}$$

Подставляя (1.7) в (1.5) и (1.6), с учетом (1.8), (1.10.) и (1.14), получаем

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+C(t)-\sum_{j=1}^{m}\{b_{4j}\xi_j(t)+\bar b_{4j}\eta_j(t)\}\ \text{при}\ t\in L' \tag{1.15}$$

$$\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=g(t)-\sum_{j=1}^{m}\{b_{4j}\zeta_j(t)+\bar b_{4j}\omega_j(t)\}\ \text{при}\ t\in L'' \tag{1.16}$$

где

$$2\xi_j(t)=(1-iX_{3j})(t-a_j)^{\lambda_j}+\lambda_j(1+iX_{3j})(t-a_j)(\bar t-\bar a_j)^{\lambda_j-1}+$$
$$+(\lambda_j+1)(X_{2j}+iX_{1j})(\bar t-\bar a_j)^{\lambda_j},$$

$$2\eta_j(t)=(1-i\bar X_{3j})(t-a_j)^{\bar\lambda_j}+\bar\lambda_j(1+i\bar X_{3j})(t-a_j)(\bar t-\bar a_j)^{\bar\lambda_j-1}+$$
$$+(\bar\lambda_j+1)(\bar X_{2j}+i\bar X_{1j})(\bar t-\bar a_j)^{\bar\lambda_j},$$

$$2\zeta_j(t)=\varkappa(1-iX_{3j})(t-a_j)^{\lambda_j}-\lambda_j(1+iX_{3j})(t-a_j)(\bar{t}-\bar{a}_j)^{\lambda_j-1}-$$

$$-(\lambda_j+1)(X_{2j}+iX_{1j})(\bar{t}-\bar{a}_j)^{\lambda_j},$$

$$2\omega_j(t)=\varkappa(1-i\bar{X}_{3j})(t-a_j)^{\bar{\lambda}_j}-\bar{\lambda}_j(1+i\bar{X}_{3j})(t-a_j)(\bar{t}-\bar{a}_j)^{\lambda_j-1}-$$

$$-(\bar{\lambda}_j+1)(\bar{X}_{2j}+i\bar{X}_{1j})(\bar{t}-\bar{a}_l)^{\bar{\lambda}_j} \qquad (1.17)$$

Для решения поставленной задачи необходимо определить голоморфные в S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, а также m вообще комплексных постоянных b_{4j} и m_1 постоянных C_{2j-1} ($j=1,2, \ldots m_1$) из граничных условий (1.15) и (1.16).

2. Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем представлять интегралом типа Коши с действительной плотностью [6,9].

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu_1(\tau)d\tau}{\tau-z}+iD_1, \qquad (2.1)$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu_2(\tau)-\bar{\tau}\mu_1'(\tau)}{\tau-z}d\tau+iD_2, \qquad (2.2)$$

где $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(\tau)$-действительные непрерывные функции, имеющие интегрируемые производные; D_1 и D_2-действительные постоянные.

Предельные значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, определяемые по формулам Сохоцкого-Племеля, на контуре L имеют устранимые разрывы в угловых точках a_j. Будем приписывать в точке a_j функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предельные значения соответственно функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, когда точка z стремится к узлу a_j по дуге L_{j-1} или L_j. Можно показать, что эти предельные значения равны между собой.

Подставляя предельные значения (2,1) и (2,2) в граничные условия (1.15) и (1.16), предварительно переходя в них к комплексно-сопряженным значениям, после некоторых преобразований, получаем следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\mu_1(t)+\mu_2(t)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\mu_1(\tau)d\bar{\tau}}{\bar{\tau}-\bar{t}}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\mu_2(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \mu_1(\tau)d\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{\tau-t}=$$

$$=2\overline{f(t)}+2\overline{C(t)}+2i(D_1-D_2)-2\sum_{j=1}^{m}\{\bar{b}_{4j}\overline{\xi_j(t)}+b_{4j}\overline{\eta_j(t)}\} \text{ при } t\in L' \qquad (2.3)$$

$$\varkappa\mu_1(t)-\mu_2(t)-\frac{\varkappa}{\pi i}\int\limits_L \frac{\mu_1(\tau)d\bar{\tau}}{\bar{\tau}-\bar{t}}-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\mu_2(\tau)d\tau}{\tau-t}-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \mu_1(\tau)d\frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{\tau-t}=$$

$$=2\overline{g(t)}+2i(\varkappa D_1+D_2)-2\sum_{j=1}^{m}\{\bar{b}_{4j}\overline{\zeta_j(t)}+b_{4j}\overline{\omega_j(t)}\} \quad \text{при} \quad t\in L'' \qquad (2.4)$$

Отделяя действительные и мнимые части в (2.3) и (2.4) и, далее, выделяя сингулярный оператор в мнимой части, после некоторых преобразований получаем

$$\mu_1(t)+\mu_2(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L [\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau)]\,d\ln\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}+\frac{1}{\pi}\int\limits_L \mu_1(\tau)\,\mathrm{Im}\,d\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}=$$

$$=2\,\mathrm{Re}[f(t)+C(t)]-2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m} b_{4j}[\xi_j(t)+\overline{\eta_j(t)}] \quad \text{при} \quad t\in L' \tag{2.5}$$

$$\varkappa\mu_1(t)-\mu_2(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L [\varkappa\mu_1(\tau)-\mu_2(\tau)]\,d\ln\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}-\frac{1}{\pi}\int\limits_L \mu_1(\tau)\,\mathrm{Im}\,d\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}=$$

$$=2\,\mathrm{Re}\,g(t)-2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m} b_{4j}[\zeta_j(t)+\overline{\omega_j(t)}] \quad \text{при} \quad t\in L'' \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\nu(\tau)d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}[(\varkappa-1)\mu_1(\tau)+2\mu_2(\tau)]\frac{d\tau}{\tau-t}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L[\mu_1(\tau)-\mu_2(\tau)]\,d\ln\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \mu_1(\tau)\,\mathrm{Re}\,d\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}+2i\,\mathrm{Im}\,[f(t)+C(t)]-2i(D_1-D_2)+$$

$$+2i\,\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{m} b_{4j}[\overline{\eta_j(t)}-\xi_j(t)] \qquad \text{при } t\in L' \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\nu(\tau)d\tau}{\tau-t}=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}[(\varkappa-1)\mu_1(\tau)+2\mu_2(\tau)]\frac{d\tau}{\tau-t}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L[\varkappa\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau)]\,d\ln\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \mu_1(\tau)\,\mathrm{Re}\,d\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}+$$

$$+2i\,\mathrm{Im}\,g(t)-2i(\varkappa D_1+D_2)+2i\,\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{m} b_{4j}[\overline{\omega_j(t)}-\zeta_j(t)] \text{ при } t\in L'', \tag{2.8}$$

где

$$\nu(\tau)=\begin{cases}\mu_1(\tau)-\mu_2(\tau) & \text{при} \quad \tau\in L'\\ \varkappa\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau) & \text{при} \quad \tau\in L''\end{cases}$$

Можно показать, что интегральные операторы, входящие в (2.5) и (2.6), являются равностепенно непрерывными функциями от t. Правые же части (2.7) и (2.8) являются функциями, удовлетворяющими условию H_0 на всей границе L([6]).

Таким образом, задача отыскания функций $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ свелась к разрывной задаче—решению регулярного интегрального уравнения второго рода (2.5) и (2.6) и сингулярного интегрального уравнения (2.7) и (2.8). Регуляризация этого уравнения, определение неизвестных постоянных C_{2j-1}, b_{4j}, а также доказательство разрешимости полученных интегральных уравнений должны стать предметом отдельного исследования.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Ս. Ս. ԶԱՐԳԱՐՅԱՆ

Միկապ, անկյուններով տիրույթի համար առաձգականության տեսության հարթ հիմնական խառը խնդրի լուծումը

Հոդվածում բերված է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը միակապ, անկյուններով տիրույթի համար, երբ նրա եզրագծի որոշ մասում տրված են տեղափոխությունները, իսկ մնացած մասում՝ լարումները։

Նախապես անջատելով անկյունային կետերում առաջացող տեղական լուծումները, խնդիրը բերվում է երկու ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի, որոնցից մեկը ռեգուլյար է, իսկ մյուսը՝ սինգուլյար։ Սինգուլյար հավասարման ռեգուլյարացումը և ինտեգրալ հավասարումների լուծելիության ապացույցը բերված է առանձին հոդվածում, որը հաջորդում է ներկայինին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Д. И. Шерман*, ДАН СССР, т. XXVIII, № 1 (1940). [2] *А. И. Каландия*, Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию акад. Н. И. Мусхелишвили, М., 1961. [3] *Д. И. Шерман*, Приложения теория функций в механике сплошной среды. Труды международного симпозиума в Тбилиси, М., 1965. [4] *С. С. Заргарян*, ДАН Арм. ССР, т. LX, № 1 (1975). [5] *С. С. Заргарян*, ДАН Арм. ССР, т. LX, № 3 (1975). [6] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, изд. «Наука», М., 1968. [7] *M. L. Williams*, I. of Appl. Mech., vol. 19. № 4 (1952). [8] *О. М. Сапонджян*, Изгиб тонких упругих плит, изд. „Айастан", Ереван 1975. [9] *Н. Е. Товмасян*, ДАН СССР, т. 160, № 5 (1965).