

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Г. В. Вирабян

О спектральном разложении одного класса
 несамосопряженных операторов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 21/XI 1978)

В работах (1-3) Р. А. Александриян показал, что самосопряженный оператор A с чисто непрерывным спектром, в сепарабельном гильбертовом пространстве H обладает полной системой собственных функционалов, а также указал методику построения этой системы собственных функционалов с помощью резольвенты оператора A . При установлении этого результата было использовано то обстоятельство, что в соответствии с основной теоремой спектральной теории самосопряженных операторов, существует неубывающая на вещественной оси функция $\rho(\lambda)$ и такое изометрическое отображение V пространства H на гильбертово пространство L^2_ρ комплексных функций, интегрируемых с квадратом модуля по мере $\rho(\lambda)$, которое „диагонализует“ оператор A в том смысле, что

$$VAV^{-1} = \lambda E = Q, \tag{5}$$

т.е. при этом отображении оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную.

Представляет интерес изучение аналогичных вопросов для несамосопряженных операторов.

Обозначим через L —класс несамосопряженных линейных ограниченных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H , мнимая часть которых является одномерным оператором, а спектр чисто непрерывный в H .

Пусть $A \in L$, тогда, как показано в работе М. С. Лифшица (4), существует унитарный оператор U , отображающий гильбертово пространство H на пространство комплекснозначных функций $L_2[0, b]$, который оператор A приводит к „треугольному“ виду

$$Bf(x) \equiv UAU^{-1}f(x) = \alpha(x)f(x) + \varepsilon i \int_0^b f(t)dt, \quad f(x) \in L_2[0, b], \tag{2}$$

где $\alpha(x)$ —вещественная неубывающая измеримая почти всюду конечная функция, а $\varepsilon = \pm 1$.

Положим для определенности $\varepsilon=1$. Вводим в рассмотрение функцию распределения для $\alpha(x)$

$$\sigma(t) = \text{mes}\{x : 0 \leq x \leq b, \alpha(x) \leq t\} \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (3)$$

Известно ⁽⁵⁾, что оператор B подобен самосопряженному тогда и только тогда, если функция распределения $\sigma(t)$ удовлетворяет условию Липшица.

Представим гильбертово пространство $L_2[0, b]$ в виде ортогональной суммы двух инвариантных относительно оператора B подпространств

$$L_2[0, b] = h_0 \oplus h_1, \quad (4)$$

так что сужение B_0 оператора B в h_0 является самосопряженным оператором, а сужение B_1 оператора B в h_1 является вполне несамопряженным. Предположим, что функция распределения $\sigma(t)$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда ⁽⁵⁾ вполне несамопряженная часть B_1 оператора B подобна самосопряженному оператору Q_1 в пространстве $L_2(M)$, определяемому формулой

$$Q_1 f(\xi) = \xi \cdot f(\xi), \quad f(\xi) \in L_2(M), \quad (5)$$

где $M = \{t : \sigma'(t) > 0\}$.

Это означает, что существует линейный ограниченный обратимый оператор S_1 (аффинитет), отображающий гильбертово пространство h_1 на пространство $L_2(M)$ так что

$$B_1 f(x) = S_1^{-1} Q_1 S_1 f(x), \quad f(x) \in h_1. \quad (6)$$

Согласно общей теореме Р. А. Александрияна ⁽³⁾ о спектральном разложении, для самосопряженного оператора B_0 в h_0 существует всюду плотное в h_0 линейное топологическое пространство Ω_{B_0} с более сильной топологией, чем топология исходного пространства h_0 , так что имеет место следующее вложение

$$\Omega_{B_0} \subset h_0 \subset \Omega_{B_0}^*, \quad (7)$$

у оператора B_0 имеется полная система собственных функционалов $\{T_\lambda^{(0)}\}$ $\lambda \in \Lambda_0$ из сопряженного пространства $\Omega_{B_0}^*$, а также имеет место следующая формула разложения

$$\int_0^b \varphi_0(x) \bar{\psi}_0(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\lambda^{(0)}(\varphi_0) \cdot T_\lambda^{(0)}(\psi_0) d\rho_0^{(\lambda)}, \quad \varphi_0, \psi_0 \in \Omega_{B_0}. \quad (8)$$

$\rho_0(\lambda)$ — спектральная функция оператора B_0 в h_0 .

Для оператора умножения на независимую переменную Q_1 рассмотрим вложение

$$C(M) \subset L_2(M) \subset C^*(M), \quad (9)$$

где $C(M)$ — пространство непрерывных функций с равномерной сходимостью, $C^*(M)$ — сопряженное пространство функционалов над $C(M)$.

Система функционалов $\delta_\lambda \in \hat{C}^*(M)$ (δ_λ — функционал Дирака) является полной системой собственных функционалов для оператора B_1 и имеет место разложение

$$\int_M f(x) \overline{g(x)} dx = \int_M \delta_\lambda(f) \cdot \overline{\delta_\lambda(g)} d\lambda, \quad f, g \in C(M). \quad (10)$$

Обозначим через Ω_{B_1} линейное пространство

$$\Omega_{B_1} = S_1^* C(M). \quad (11)$$

Мы скажем $\varphi_1^{(n)} \xrightarrow{\Omega_{B_1}} 0$ $\varphi_1^{(n)} \in \Omega_{B_1}$, если $\psi_n = S_1^{*-1} \varphi_1^{(n)} \xrightarrow{C(M)} 0$. Пространство Ω_{B_1} инвариантно относительно оператора B_1^* . В самом деле, пусть $\varphi_1 \in \Omega_{B_1}$, тогда $B_1^* \varphi_1 = S_1^* Q_1 S_1^{*-1} \varphi_1$, но $Q_1 S_1^{*-1} \varphi_1 \in C(M)$, поэтому $B_1^* \varphi_1 \in \Omega_{B_1}$.

Построим систему линейных функционалов над пространством Ω_{B_1} по формуле

$$T_\lambda^{(1)}(\varphi_1) = \delta_\lambda(S_1^{*-1} \varphi_1), \quad \varphi_1 \in \Omega_{B_1}. \quad (12)$$

Линейность функционалов (12) следует из равенств

$$\begin{aligned} T_\lambda^{(1)}(c\varphi_1 + d\psi_1) &= \delta_\lambda(cS_1^{*-1}\varphi_1 + d \cdot S_1^{*-1}\psi_1) = c \cdot \delta_\lambda(S_1^{*-1}\varphi_1) + d \cdot \delta_\lambda(S_1^{*-1}\psi_1) = \\ &= c \cdot T_\lambda^{(1)}(\varphi_1) + d \cdot T_\lambda^{(1)}(\psi_1); \quad \varphi_1, \psi_1 \in \Omega_{B_1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Функционалы непрерывны над пространством Ω_{B_1} .

Пусть $\varphi_1^{(n)} \xrightarrow{\Omega_{B_1}} 0$. Тогда $S_1^{*-1} \varphi_1^{(n)} \xrightarrow{C(M)} 0$ и

$$T_\lambda^{(1)}(\varphi_1^{(n)}) = \delta_\lambda(S_1^{*-1} \varphi_1^{(n)}) \rightarrow 0. \quad (14)$$

Рассмотрим вложение

$$\Omega_{B_1} \subset h_1 \subset \Omega_{B_1}^*. \quad (15)$$

Вышепостроенная система линейных функционалов (12) из $\Omega_{B_1}^*$ является системой собственных функционалов для вполне несамопряженного оператора B_1 . Действительно, для произвольного $\varphi_1 \in \Omega_{B_1}$ имеем

$$T_\lambda^{(1)}((B_1^* - \lambda I)\varphi_1) = \delta_\lambda(S_1^{*-1}(B_1^* - \lambda I) S_1^* S_1^{*-1} \varphi_1) = \delta_\lambda((Q_1 - \lambda I) S_1^{*-1} \varphi_1) = 0. \quad (16)$$

Из (10) и (12) имеем

$$\begin{aligned} \int_M S_1^{*-1} \varphi_1(x) \cdot \overline{S_1^{*-1} \psi_1(x)} dx &= \int_M \delta_\lambda(S_1^{*-1} \varphi_1) \cdot \overline{\delta_\lambda(S_1^{*-1} \psi_1)} d\lambda = \\ &= \int_M T_\lambda^{(1)}(\varphi_1) \cdot \overline{T_\lambda^{(1)}(\psi_1)} d\lambda, \quad \varphi_1(x), \psi_1(x) \in \Omega_{B_1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (8) и (17) для произвольных $\varphi_0, \psi_0 \in \Omega_{B_0}$ и $\varphi_1, \psi_1 \in \Omega_{B_1}$ имеет место равенство

$$\int_0^b \varphi_0(x) \overline{\psi_0(x)} dx + \int_M S_1^{*-1} \varphi_1(x) \cdot \overline{S_1^{*-1} \psi_1(x)} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} T_{\lambda}^{(0)}(\varphi_0) \cdot \overline{T_{\lambda}^{(0)}(\psi_0)} d\rho_0(\lambda) + \int_M T_{\lambda}^{(1)}(\varphi_1) \cdot \overline{T_{\lambda}^{(1)}(\psi_1)} d\lambda. \quad (18)$$

Вводим следующие обозначения

$$\begin{aligned} H_0 &= U^{-1}h_0, \quad H_1 = U^{-1}h_1; \\ \Omega_{A_0} &= U^{-1}\Omega_{B_0}; \quad \Omega_{A_1} = U^{*-1}\Omega_{B_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда легко проверяются следующие соотношения

$$H = H_0 \oplus H_1 \quad (20)$$

$$AH_0 \subseteq H_0; \quad AH_1 \subseteq H_1; \quad A_0\Omega_{A_0} \subseteq \Omega_{A_0}; \quad A_1\Omega_{A_1} \subseteq \Omega_{A_1}; \quad (21)$$

где A_0, A_1 соответственно сужения оператора A на подпространствах H_0 и H_1 .

Мы скажем $u_0^{(n)} \xrightarrow{\Omega_{A_0}} 0$ ($u_1^{(n)} \rightarrow 0$), $u_0^{(n)} \in \Omega_{A_0}$ ($u_1^{(n)} \in \Omega_{A_1}$), если $Uu_0^{(n)} \xrightarrow{\Omega_{B_0}} 0$ ($U^*u_1^{(n)} \xrightarrow{\Omega_{B_1}} 0$) при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим следующие вложения

$$\Omega_{A_0} \subset H_0 \subset \Omega_{A_0}^*; \quad \Omega_{A_1} \subset H_1 \subset \Omega_{A_1}^*. \quad (22)$$

Построим следующие системы функционалов

$$l_{\lambda}^{(0)}(u_0) = T_{\lambda}^{(0)}(Uu_0); \quad l_{\lambda}^{(1)}(u_1) = T_{\lambda}^{(1)}(U^*u_1) \quad u_0 \in \Omega_{A_0}, \quad u_1 \in \Omega_{A_1}; \quad (23)$$

Легко проверить, что $l_{\lambda}^{(0)} \in \Omega_{A_0}^*$, $l_{\lambda}^{(1)} \in \Omega_{A_1}^*$.

Далее имеем

$$l_{\lambda}^{(0)}((A_0 - \lambda I)u_0) = T_{\lambda}^{(0)}(U(A_0 - \lambda I)U^{-1}Uu_0) = T_{\lambda}^{(0)}((B_0 - \lambda I)Uu_0) = 0, \quad (24)$$

$$l_{\lambda}^{(1)}((A_1 - \lambda I)u_1) = T_{\lambda}^{(1)}(U^*(A_1 - \lambda I)U^{*-1}U^*u_1) = T_{\lambda}^{(1)}(B_1^* - \lambda I)U^*u_1 = 0.$$

$$u_0 \in \Omega_{A_0}, \quad u_1 \in \Omega_{A_1}. \quad (25)$$

То есть системы функционалов (23) являются системами собственных функционалов соответственно для операторов сужения A_0 и A_1 .

Далее для произвольных элементов $u_0, v_0 \in \Omega_{A_0}$ и $u_1, v_1 \in \Omega_{A_1}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^b Uu_0 \overline{Uv_0} dx + \int_M S_1^{*-1} U^*u_1 \overline{S_1^{*-1} U^*v_1} dx = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} l_{\lambda}^{(0)}(u_0) \cdot \overline{l_{\lambda}^{(0)}(v_0)} d\rho(\lambda) + \int_M l_{\lambda}^{(1)}(u_1) \cdot \overline{l_{\lambda}^{(1)}(v_1)} d\lambda. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом установлена

Теорема. Если оператор A из класса L , то существуют линейные топологические пространства $\Omega_{A_0}, \Omega_{A_1}$, инвариантные соответственно относительно сужений A_0, A_1 оператора A , так что эти операторы обладают полной системой собственных функционалов в соответствующих пространствах и имеет место формула разложения (26).

В заключение рассмотрим случай, когда $\alpha(x) \equiv x$. Тогда само-

сопряженная часть оператора B отсутствует и он оказывается вполне несамосопряженным, но подобным самосопряженному оператору ⁽⁵⁾. В этом случае оператор подобия S и его обратный пишутся в явном виде ⁽⁶⁾

$$S_1^{-1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(i+1)} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^i f(t) dt, \quad (27)$$

$$S_1^{-1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-i+1)} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^b (x-t)^{-i} f(t) dt. \quad (28)$$

Множество M совпадает с отрезком $[0, b]$, а формула разложения (26) принимает вид

$$\int_0^b S_1^{*-1} U^* u_1 \cdot S_1^{*-1} U^* v_1 dx = \int_0^b l_\lambda^{(1)}(u_1) \cdot \overline{l_\lambda^{(1)}(v_1)} d\lambda; \quad u_1, v_1 \in \Omega_{A_1}. \quad (29)$$

Ереванский государственный университет

Գ. Վ. ՎԻՐԱՔՅԱՆ

Ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների մի դասի սպեկտրալ վերլուծության մասին

Աշխատանքում դիտարկված է H սեպարաբել հիլբերտյան տարածության մեջ գործող, մեկ շափանի կեղծ մաս ունեցող զուտ անընդհատ սպեկտրով գծային սահմանափակ ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների այսպես կոչված U . U . կիֆշիցի L -դասը: Այդ դասին պատկանող օպերատորների համար ապացուցված է սեփական ֆունկցիոնալների լրիվ համակարգի գոյության վերաբերյալ թեորեմ, ինչպես նաև ստացված է ըստ սեփական ֆունկցիոնալների սպեկտրալ վերլուծության բանաձև:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Р. А. Александрян, Докторская диссертация, МГУ, 1962. ² Р. А. Александрян, ДАН Арм. ССР, т. X, № 5 (1965). ³ Р. А. Александрян, ДАН СССР, т. 162, № 1 (1965). ⁴ М. С. Лифшиц, Матем. сб. 34 (76), 145—199 (1954). ⁵ Ч. Фояш, Секефальви-Надь, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, Изд. «Мир», М., 1970. ⁶ Л. А. Сахнович, УМН, т. XIII, вып. 4(82) (1958).