ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

В. А. Мартиросян

О равномерном приближении многочленами с коэффициентами из заданного множества

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 15/IV 1980)

Пусть $C[a, b]$—банахово пространство вещественных непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$, $A = \{\pm a_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_0 = 0$, —строго монотонно возрастающая к бесконечности последовательность действительных чисел.

В 1965 г. А. О. Гельфонд установил ([1]), что если последовательность чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$a_{n+1} - a_n \leqslant C a_n^{\gamma}, \ n = 0, 1, \ldots,$$

где $0<\gamma<1$, C — постоянная, а для числа α, $0<\alpha<1$, имеем

$$\alpha < \left[\frac{1}{2}\,\alpha(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]^{\gamma} = \beta^*,$$

то любую функцию из $C[\alpha, \beta]$, где $\alpha<\beta<\beta^*$, можно приблизить равномерно на $[\alpha, \beta]$ многочленами вида

$$p(x) = \sum_{k=0}^{s} b_k x^k, \ b_k \in A, \ k = 0, 1, \ldots, s,$$

т. е. многочленами с коэффициентами из заданного множества A. Впоследствии Р. М. Тригуб увеличил постоянную β^*, показав ([2]), что можно взять $\beta^* = \alpha^{\gamma}$.

В том частном случае, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_{n+1} - a_n)}{\log a_n} = 0,$$

из приведенного результата следует, что какой бы ни взять сегмент $[\alpha, \beta]$, $0<\alpha<\beta<1$, указанными многочленами можно приблизить равномерно на $[\alpha, \beta]$ любую функцию из $C[\alpha, \beta]$. Однако неясно, справедливо ли подобное утверждение для сегмента $[0, 1]$.

В связи с этим в настоящей заметке приводится один результат о равномерном приближении на сегменте $[0, 1]$ многочленами с коэффициентами из заданного множества.

Теорема. *Пусть последовательность положительных чисел* $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{k\to\infty} \nu_k = +\infty,$$

а для определенной при $0 < x < +\infty$ *положительной неубывающей функции* $\varphi(x)$ *существует такое число* $p > 0$, *что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(e^{k\nu_k})}{k^p} < \infty. \tag{1}$$

Если строго монотонно возрастающая к бесконечности последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, *где* $a_0 = 0$, *удовлетворяет условию*

$$a_{n+1} - a_n \leq \varphi(a_n),\ n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

то любую функцию $f \in C[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, *можно приблизить равномерно на* $[0, 1]$ *многочленами с коэффициентами из множества* $A = \{\pm a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Из приведенной теоремы непосредственно получаем

Следствие. *Пусть строго монотонно возрастающая к бесконечности последовательность действительных чисел* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, *где* $a_0 = 0$, *удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log(a_{n+1} - a_n)}{\log\log a_n} < +\infty.$$

Тогда любую функцию $f \in C[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, *можно приблизить равномерно на* $[0, 1]$ *многочленами с коэффициентами из множества* $A = \{\pm a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Обратимся к доказательству теоремы.

Доказательство. Возьмем число ε, $0 < \varepsilon < 1$. Учитывая (1), подберем такие натуральные числа m и N, что $m \geq 4$, $m > p$ и

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{\varphi(e^{k\nu_k})}{k^m} < \varepsilon. \tag{3}$$

Для заданной функции $f \in C[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, построим такую функцию $g \in C[0, 1]$, что

$$\|f - g\| < \varepsilon \tag{3}$$

и $g(x) = 0$ в окрестностях точек 0 и 1 соответственно. Ясно, что функция

$$\psi(x) = \frac{g(x)}{x^{2^m N}(1-x)\cdot\ldots\cdot(1-x^{2^m-1})}$$

принадлежит $C[0, 1]$, причем $\psi(0)=\psi(1)=0$. Поэтому найдется (см. ([3])) такой многочлен $q(x)=\sum_{k=0}^{s} c_k x^k$, что

$$\|\psi(x)-q(x^{2^m})\|<\varepsilon$$

и (5)

$$|c_k|<\varepsilon e^{k\nu_k},\ k=0,\ 1,\ldots,\ s.$$

Отсюда будем иметь

$$\|g-r\|<\varepsilon, \tag{6}$$

где

$$r(x)=\sum_{k=0}^{s} c_k x^{2^m(k+N)}(1-x)\cdot\ldots\cdot(1-x^{2^{m-1}}).$$

Многочлен с коэффициентами из A, приближающий f, построим следующим образом. Пусть имеем $a_{n_k}\leqslant|c_k|<a_{n_{k+1}}$, $k=0, 1, \ldots, s$. Тогда, заменяя у многочлена $r(x)$ каждый коэффициент c_k на $a_{n_k}\operatorname{sign} c_k$, получим многочлен $p(x)$ с коэффициентами из A, так как каждый многочлен

$$x^{2^m(k+N)}(1-x)\cdot\ldots\cdot(1-x^{2^{m-1}}),\ k=0,\ 1,\ldots,\ s,$$

составлен со знаками плюс или минус только из степеней

$$x^{2^m(k+N)},\ x^{2^m(k+N)+1},\ \ldots,\ x^{2^m(k+N)+2^m-1}.$$

Чтобы оценить уклонение $p(x)$ от $r(x)$, отметим, что

$$|c_k-a_{n_k}\operatorname{sign} c_k|\leqslant a_{n_k+1}-a_{n_k},\ k=0,\ 1,\ldots,\ s.$$

Значит, в силу (2), (5) и монотонности функции $\varphi(x)$ будем иметь $(0<\varepsilon<1)$

$$|c_k-a_{n_k}\operatorname{sign} c_k|\leqslant\varphi(a_{n_k})\leqslant\varphi(|c_k|)\leqslant\varphi(e^{k\nu_k}),\ k=0,\ 1,\ldots,\ s,$$

откуда получим

$$|r(x)-p(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{s}\varphi(e^{k\nu_k})\,x^{2^m(k+N)}(1-x)\cdot\ldots\cdot(1-x^{2^{m-1}}),\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Однако, так как при $0\leqslant x\leqslant 1$

$$(1-x^{2^l})\leqslant 2^l(1-x),\ l=0,\ 1,\ldots,$$

то простыми выкладками будем иметь

$$x^{2^m(k+N)}(1-x)\cdot\ldots\cdot(1-x^{2^{m-1}})\leqslant 2^{\frac{m(m-1)}{2}}\,x^{2^m(k+N)}(1-x)^m\leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{m(m-1)}{2}}\left[\frac{m}{2^m(k+N)+m}\right]^m\leqslant\frac{1}{(k+N)^m}.$$

Следовательно, с учетом (3) и монотонности $\varphi(x)$ получим

$$\|r-p\|<\varepsilon,$$

что вместе с (4) и (6) даст

$$\|f-p\|<3\varepsilon.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Определенное изменение доказательства теоремы позволяет установить следующее утверждение:

Пусть строго монотонно возрастающая последовательность действительных чисел $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, *где* $\lambda_0=0$, *удовлетворяет условию*

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_k=\lambda_\infty<+\infty,$$

последовательность положительных чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *при любом* $p>0$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{k\to\infty}\nu_k(\lambda_\infty-\lambda_{2k+1})^p=+\infty,$$

а для определенной при $0\leqslant x<+\infty$ *положительной неубывающей функции* $\varphi(x)$ *имеем*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{\nu_k}{\lambda_{2k+1}-\lambda_{2k}}\right)(\lambda_{2k+1}-\lambda_{2k})<\infty.$$

Если строго монотонно возрастающая к бесконечности последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, *где* $a_0=0$, *удовлетворяет условию*

$$a_{n+1}-a_n\leqslant\varphi(a_n),\ n=0,\ 1,\ldots,$$

то любую функцию $f\in C[0,\ 1]$, $f(0)=f(1)=0$, *можно приблизить равномерно на* $[0,\ 1]$ *квазиполиномами вида*

$$p(x)=\sum_{k=0}^{s}b_kx^{\lambda_k},\ b_k\in A=\{\pm a_n\}_{n=0}^{\infty},\ k=0,\ 1,\ldots,\ s.$$

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Տրված բազմությունից գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման մասին

Ներկա աշխատանքում Ա. Օ. Գելֆոնդի (1) *աշխատանքի կապակցությամբ ուսումնասիրվում է տրված բազմությունից գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման հնարավորությունը* [0, 1] *հատվածի վրա։ Մասնավորաբար ապացուցված է, որ եթե անվերջի ձգտող* խիստ մոնոտոն աճող $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_0=0$, իրական թվերի հաջորդականությունը բավարարում է

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log(a_{n+1}-a_n)}{\log\log a_n}<\infty$$

պայմանին, ապա՝ ցանկացած $f\in C[0,\ 1]$, $f(0)=f(1)=0$ ֆունկցիան կարելի է $[0,\ 1]$ հատվածի վրա հավասարաչափ մոտարկել $A=\{\pm a_n\}_{n=0}^{\infty}$ բազմությունից գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. О. Гельфонд*, Успехи матем. наук, т. 21, вып. 3 (1966). [2] *Р. М. Тригуб*, Изв. вузов. Математика, № 1 (1977). [3] *С. Я. Хавинсон*, Матем. заметки, т. 6, № 5 (1969).