ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 5

УДК 512.2

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Бабаджанян

О сходимости общих процессов итеративного агрегирования

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 18/I 1979)

1. Метод итеративного агрегирования был предложен в [1] для решения систем линейных балансовых уравнений вида

$$x = Ax + y \quad (x \in R^n) \tag{1}$$

с заданными неотрицательными матрицей A и вектором y. Предполагается, что l_1-норма матрицы A удовлетворяет неравенству

$$\|A\| < 1. \tag{2}$$

В этом направлении отметим также работу [2].

В работах [3-5], посвященных обоснованию метода итеративного агрегирования, удалось получить доказательство сходимости в общем случае лишь при выполнении условия $\|A\| < \frac{1}{3}$. Кроме того, в [6,7] исследована сходимость процесса, когда коэффициенты исходной системы (1) „почти“ удовлетворяют условиям Хатанака.

В настоящей работе предложен новый метод (процесс) итеративного агрегирования (названный специальным) для решения систем уравнений вида (1). Доказана его сходимость в случаях аналогичных [3-5].

Предлагаются общие (l—кратные) процессы итеративного агрегирования, являющиеся обобщениями известного метода итеративного агрегирования [1] и отмеченного выше специального метода. Показана сходимость l—кратных процессов в случаях, известных для процесса итеративного агрегирования. Более того, для достаточно больших l сходимость имеет место и при условии (2).

2. Процесс итеративного агрегирования в общем случае можно выписать в следующей векторно-матричной форме [4,5,7] (здесь следуем обозначениям, принятым в [7]):

$$X^{(k+1)} = TAP_k X^{(k+1)} + Y, \quad Y = Ty, \tag{3}$$

$$x^{(k+1)} = AP_k X^{(k+1)} + y \qquad (k = 0, 1 \ldots), \tag{4}$$

$$x^{(0)} \geqslant 0, \sum_{e \in N_j} x_e^{(0)} \neq 0, \quad N_j = \{ e \mid s_{j-1} < e \leqslant s_j \}, \tag{5}$$

где $X^{(k+1)}$, Y—m-мерные вектор-столбцы; k—номер шага итерации.

Через T обозначена агрегирующая матрица размерности $m \times n$

$$T = \left| \begin{matrix} 1 \cdot \cdot \cdot 10 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 0 \\ 0 \cdot \cdot \cdot 01 \cdot \cdot \cdot 10 \cdot \cdot \cdot 0 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 01 \cdot \cdot \cdot 1 \end{matrix} \right| .$$

в j-ой строке и q-м столбце которой стоит единица, если q-я переменная системы (1) принадлежит j-й группе и нуль—в противном случае, $j = 1 \ldots m$, $q = 1 \ldots n$. Без ограничения общности принято, что переменные перенумерованы в порядке их объединения.

Весовая матрица

$$P_k = \left| \begin{matrix} p_1^{(k)} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{s_1}^{(k)} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & p_{s_1+1}^{(k)} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & p_{s_2}^{(k)} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_{s_{m-1}}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & p_n^{(k)} \end{matrix} \right| \tag{6}$$

получается из матрицы T^T заменой каждой единицы весом

$$p_q^{(k)} = \frac{x_q^{(k)}}{\sum_{e \in N_j} x_e^{(k)}} \quad q \in N_j \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{7}$$

Как видно из (4), решением уравнений (межпродуктового) баланса (1) на каждом шаге $k = 0, 1, \ldots$ принимается приближение $x^{(k+1)}$, найденное путем дезагрегации валового выпуска агрегированной системы уравнений (межотраслевого) баланса (3) (т. е. путем подстановки приближения $P_k X^{(k+1)}$ в (1)).

Специальный процесс итеративного агрегирования в общем случае имеет следующий векторно-матричный вид:

$$Z^{(k+1)} = TAP_k Z^{(k+1)} + TAy, \tag{8}$$

$$x^{(k+1)} = P_k Z^{(k+1)} + y, \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{9}$$

$$Ax^{(0)} \geqslant 0, \quad \sum_{e \in N_j} \sum_{i=1}^{n} a_{ei} x_i^{(0)} \neq 0 \tag{10}$$

Матрица P_k имеет вид (6), однако веса находятся уже из соотношений:

$$p_q^{(k)}=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{qi}x_i^{(k)}}{\sum_{e\in N_j}\sum_{i=1}^{n} a_{ei}x_i^{(k)}},\quad q\in N_j \quad (j=1,\ldots m). \tag{11}$$

Здесь уже приближение $x^{(k+1)}$ находится путем дезагрегации потока затрат, найденного из уравнений межотраслевого баланса (8) (т. е. путем подстановки приближения $P_kZ^{(k+1)}$ в (1)). Условие (11) означает, что в матрице коэффициентов прямых затрат межотраслевого баланса (8), на каждом шаге $k=0, 1, \ldots$ зафиксированы пропорции потока затрат продуктов внутри отрасли (в отличие от процесса (3)—(7), где фиксированы пропорции валового выпуска).

З а м е ч а н и е 1. В частном случае, если $|A|\neq 0$, то процесс (8)—(11) выводится из (3)—(7) и наоборот.

Т е о р е м а 1. *При* $T=(1,\ldots,1)$ *итерационный процесс* (8)—(11) *монотонно сходится (в* l_1*—норме) со скоростью геометрической прогрессии, если матрица A удовлетворяет условию* (2).

З а м е ч а н и е 2. Скорость сходимости определяется вторым по модулю собственным значением стохастической матрицы $S=\|s_{qg}\|_1^n$

$$s_{qg}=a_{qg}+\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{qi}b_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i}(1-\alpha_g),$$

где $\alpha_g=\sum_{q=1}^{n} a_{qg}$.

Т е о р е м а 2. *Итерационный процесс* (8)—(11), *в общем случае агрегирующей матрицы T, монотонно сходится со скоростью геометрической прогрессии, если матрица A удовлетворяет условию*

$$\|A\|<\frac{1}{3}.$$

3. Выписывая уравнение (1) в ином виде, а именно

$$x=y+Ay+\ldots+A^ly+A^{l+1}x$$

и используя рассуждения п. 2, можно обобщить оба процесса итеративного агрегирования.

l—кратный процесс итеративного агрегирования $(A^{l+1}x=$ $=A(A^lx))$:

$$X^{(k+1)}=TAP_kX^{(k+1)}+TA^ly \quad (k=0, 1, \ldots), \tag{3'}$$

$$x^{(k+1)}=AP_kX^{(k+1)}+A^ly+\ldots+Ay+y, \tag{4'}$$

где матрица P_k имеет вид (6), однако веса находятся из соотношений:

$$p_q^{(k)} = \frac{(A^l x^{(k)})_q}{\sum_{l \in N_j} (A^l x^{(k)})_l}, \quad q \in N_j \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{7'}$$

l—кратный специальный процесс итеративного агрегирования:

$$Z^{(k+1)} = TAP_k Z^{(k+1)} + TA^{l+1} y \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{8'}$$

$$x^{(k+1)} = P_k Z^{(k+1)} + A^l y + \ldots + Ay + y, \tag{9'}$$

где

$$p_q^{(k)} = \frac{(A^{l+1} x^{(k)})_q}{\sum_{l \in N_j} (A^{l+1} x^{(k)})_l}, \quad q \in N_j \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{11'}$$

В обоих процессах требуются очевидные условия, аналогичные (5) и (10).

Замечание 3. Теоремы 1, 2 и замечание 1 имеют место для l—кратных процессов.

Теорема 3. *Для некоторого* l_0 l—*кратные итеративные процессы* (3′)—(7′) и (8′)—(11′) *в общем случае агрегирующей матрицы* T *монотонно сходятся со скоростью геометрической прогрессии и при условии* (2).

Доказательство теоремы проводится аналогично ([7]), откуда и следует неравенство $\|A\|^{l+1} < 1/3$.

4. Более полное изложение полученных результатов, а также сравнительный анализ предлагаемых методов излагаются автором в других работах.

Армянский научно-исследовательский
институт энергетики

Ա. Ա. ԲԱՐԱՋԱՆՅԱՆ

Իտերատիվ ագրեգացման ընդհանուր պրոցեսների զուգամիտման մասին

Աշխատանքում ներկայացված է նոր (հատուկ) իտերատիվ ագրեգացման մեթոդ գծային բալանսային հավասարումների լուծման համար։ Ապացուցված է նրա զուգամիտումը որոշ դեպքերում։

Բերվում է իտերատիվ ագրեգացման պրոցեսների ընդհանրացումը՝ l-պատիկ իտերատիվ ագրեգացման պրոցեսներ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. М. Дудкин, Э. Б. Ершов,* «Плановое хозяйство», № 5, 1965. [2] *J. C-H. Fel,* Econometrica, v 12, №1 (1956). [3] *Б. А. Щенников,* Экономика и матем. методы, т. 1, вып. 6 (1965) [4] *Б. А. Щенников,* ДАН СССР, т. 173, № 4 (1967). [5] *Л. А. Хиздер,* Сб. «Исследования по математической экономии и смежным вопросам», вып. 21, МГУ (1972). [6] *М. В. Калинина,* Сб: «Вычислительные методы и программирование», вып. 21, МГУ (1973). [7] *В. А. Хомяков,* «Автоматика и телемеханика», № 7, 1973. [8] *Л. М. Дудкин,* Система расчетов оптимального народнохозяйственного плана, «Экономика», М., 1972.