ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIX 1984 3

УДК 512.831

МАТЕМАТИКА

А. М. Мовсисян

Сверточные тождества на нильпотентной подалгебре алгебры матриц второго порядка

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 15/IV 1983)

Для смешанного тензора T над полем k через $S_b^a T$ будем обозначать свертку T по a-му верхнему и b-му нижнему индексам. Сверточной формой степени n называем выражение вида

$$G=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \xi_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \quad S_{i_1}^1 S_{i_2}^2 \ldots S_{i_n}^n, \tag{1}$$

где $\xi_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\in k$, а сумма распространена на все перестановки $i_1, i_2,\ldots, i_n$ множества $1, 2, \ldots, n$. Значением формы (1) на (n, n)-тензоре T называется элемент

$$G(T)=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \xi_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \; S_{i_1}^1 S_{i_2}^2 \ldots S_{i_n}^n T\in k.$$

Матрицу A из алгебры k_m будем рассматривать как (1,1)-тензор. Сверточную форму G называем тождеством на k_m, если

$$G(A_1\otimes A_2\otimes \ldots \otimes A_n)=0$$

для любых матриц $A_1, A_2, \ldots, A_n\in k_m$. Такие тождества изучались в ([1]) (тот факт, что там были произвольные (n, n)-тензоры, а не только разложимые тензоры вида $A_1\otimes \ldots \otimes A_n$, не меняет дела, так как разложимые тензоры порождают все пространство (n, n)-тензоров). Там же было показано, что все они — следствия тождества, эквивалентного теореме Кэли—Гамильтона.

Здесь мы занимаемся более общей задачей. Пусть U—подалгебра k_m. Форму G будем называть (s, n)-тождеством на U, если

$$G(A_1\otimes A_2\otimes \ldots \otimes A_s\otimes B_{s+1}\otimes \ldots \otimes B_n)=0$$

для любых матриц $A_1, \ldots, A_s\in k_m$, $B_{s+1}, \ldots, B_n\in U$.

Пусть $T_1=D_1\otimes D_2\otimes \ldots \otimes D_t\otimes F_{t+1}\otimes \ldots \otimes F_f$, $f\geqslant n$, $D_i\in k_m$, $F_j\in U$, и пусть $j_1, j_2, \ldots, j_{f-n}$—различные целые между 1 и f, $1\leqslant i_1< i_2< \ldots < i_{f-n}\leqslant f$. Тогда свертка

$$T_2=S_{j_1}^{i_1} S_{j_2}^{i_2} \ldots S_{j_{f-n}}^{i_{f-n}} T_1$$

имеет вид

$$T_2=\alpha C_1\otimes C_2\otimes \ldots \otimes C_n,$$

где каждая из матриц C_i—произведение нескольких из матриц $D_1, \ldots, D_t, F_{t+1}, \ldots, F_f$, а $\alpha\in k$—элемент, равный произведению следов от произведений каких-то из матриц $D_1, \ldots, D_t$, $F_{t+1}, \ldots, F_f$.

Предположим, что свертка такова, что $C_{s+1}\otimes C_{s+2}\otimes\ldots\otimes C_n$ с точностью до скалярного множителя получается сверткой из $F_{t+1}\otimes\ldots\otimes F_f$, так что $C_{s+1},\ldots,C_n\in U$ (отметим, что и некоторые из матриц $C_1,\ldots,C_s$ тоже могут принадлежать U). Тогда, подставляя в тождество (2), получим (t,f) тождество на U, которое будем называть непосредственным формальным (t,f)-следствием (2).

Если у нас теперь имеется некоторая система тождеств на U, то (t,f)-тождество на U будет называться формальным следствием этой системы, если оно является линейной комбинацией непосредственных формальных (t,f)-следствий тождеств этой системы.

Теперь мы можем сформулировать интересующую нас проблему. Пусть U—подалгебра алгебры k_m; требуется найти систему сверточных тождеств на U такую, что всякое сверточное тождество на U—формальное следствие тождеств этой системы. В настоящей работе указанная проблема решается для подалгебры N алгебры k_2, состоящей из матриц вида

$$\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \alpha\in k.$$

Теорема. *Всякое сверточное тождество на N следует из тождеств:*

1) $S_1^1 B=0$,

2) $S_2^1 S_3^2 S_1^3(A_1\otimes B_2\otimes B_3)=0$,

3) $\sum\limits_{i_1,i_2,i_3}(-1)^{J(i_1,i_2,i_3)}S_{i_1}^1S_{i_2}^2S_{i_3}^3(A_1\otimes A_2\otimes A_3)=0.$

Замечание. Тождество 3) эквивалентно теореме Кэли—Гамильтона для матриц второго порядка (см. ([1])). Тождества 1), 2) равносильны соотношениям:

$$S_pB=0,\quad B_1B_2=0.$$

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i_1,\ldots,i_f}\xi_{i_1,i_2,\ldots,i_f}S_{i_1}^1S_{i_2}^2\ldots S_{i_f}^f(A_1\otimes\ldots\otimes A_t\otimes B_{t+1}\otimes\ldots\otimes B_f)=0 \qquad (2)$$

—(s,f)-тождество на N. Как и в ([1]), типом этого тождества назовем наибольшую (в смысле лексикографического упорядочения) перестановку $i_1,i_2,\ldots,i_f$ такую, что $\xi_{i_1,i_2,\ldots,i_f}\neq0$, типом нулевого тождества считаем ∞. Если в последовательности $i_1,i_2,\ldots,i_f$ есть убывающая подпоследовательность длины 3, то вычитая из (2) соответствующее формальное следствие тождества 3), мы сможем уменьшить тип тождества (2) (подробнее эта процедура описана в ([1])). Точно так же можно уменьшить тип тождества, если для некоторого $j>t$ $i_j=j$ (за счет формального следствия тождества 1), или если при $j>f$ также и $i_j>f$ (вычитая соответствующее формальное следствие 1 или тождества 2).

Остается, таким образом, показать, что если в (2) коэффициенты $\xi_{j_1,j_2,\ldots,j_f}$ равны 0 при $(j_1,j_2,\ldots,j_f)>(i_1,i_2,\ldots,i_f)$ и в последовательности $i_1,i_2,\ldots,i_f$ нет убывающих подпоследовательностей длины 3, причем $i_s \leqslant t$ при $s > t$, то $\xi_{i_1, i_2, \ldots, i_f} = 0$. Для доказательства же этого утверждения сделаем в (2) подстановку

$$A_r, B_r \to e_{\alpha_r \beta_r},$$

где

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\beta_r = 1$, если числу i_r в последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_r$ не предшествует большее число, $\beta_r = 2$ в противном случае, $\alpha_r = \beta_q$ для такого q, что $i_q = r$. Если $r > t$, то $\beta_r = 2$, так как по условию тогда $i_r \leqslant t$ и среди чисел $i_1, i_2, \ldots, i_t$ хотя бы одно больше i_r. Далее, при $r > t$ пусть $i_q = r$, тогда $q \leqslant t$, $i_q = r > t \geqslant i_f$, и поэтому $i_q > i_p$ для $p < q$ (в противном случае была бы убывающая тройка $i_p > i_q > i_f$), а это означает, что $\alpha_r = \beta_q = 1$. Таким образом, вместо матрицы B_r $(r > t)$ всегда подставляется матрица $e_{12} \in N$, т. е. наша подстановка корректна.

Но эта подстановка в точности та же самая, которая фигурировала в лемме работы [1], поэтому

$$S^1_{j_1} S^2_{j_2} \ldots S^f_{j_f} (e_{\alpha_1 \beta_1} \otimes e_{\alpha_2 \beta_2} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_f \beta_f}) = 0$$

при $(j_1, j_2, \ldots j_f) < (i_1, i_2, \ldots, i_f)$,

$$S^1_{i_1} S^2_{i_2} \ldots S^f_{i_f} (e_{\alpha_1 \beta_1} \otimes e_{\alpha_2 \beta_2} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_f \beta_f}) = 1.$$

Подставляя эти тождества в (2) и помня, что $\xi_{j_1, j_2, \ldots, j_f} = 0$ при $(j_1, j_2, \ldots, j_f) > (i_1, i_2, \ldots, i_f)$, получаем требуемое равенство

$$\xi_{i_1, i_2, \ldots i_f} = 0.$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. В. Яковлеву, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный
университет

Ա. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Երկրորդ կարգի մատրիցների հանրահաշիվների նիլպոտենտ ենթահանրահաշիվների փաթաթման նույնությունները

Աշխատանքում դիտարկվում է մատրիցների հանրահաշիվների նիլպոտենտ ենթահանրահաշիվների հետքով նույնությունների փաթաթման տարբերակը։ Տրվում է փաթաթման նույնությունների գաղափարը մատրիցների հանրահաշիվների ցանկացած ենթահանրահաշիվների վրա։ Երկրորդ կարգի մատրիցների որոշ ենթահանրահաշվի համար նկարագրվում են փաթաթման նույնությունները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *А. В. Яковлев, А. М. Мовсисян.* Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. мат. ин-та АН СССР, т. 114 (1982).