

Р. С. Геворкян, Е. Г. Вирабян

**Асимптотические решения краевых задач теории упругости для круговой кольцевой пластины из несжимаемого материала**

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 29/I 2001)

Путем асимптотического интегрирования уравнений пространственной задачи теории упругости в цилиндрических координатах, с учетом несжимаемости материала, найдены решения внутренней задачи для круговых кольцевых пластин, когда на ее лицевых поверхностях заданы кинематические или смешанные условия. В качестве приложения приведены решения ряда прикладных задач.

1. Имеем круглую кольцевую пластину, занимающую область  $\Omega = \{ r, \varphi, z: R_0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -h \leq z \leq h, h \ll R_0, h \ll R - R_0 \}$  (рис. 1). Требуется определить напряженно-деформированное состояние пластины, если она из несжимаемого материала, а на ее лицевых поверхностях заданы кинематические

$$u_j(r, \varphi, z = \pm h) = u_j^\pm(r, \varphi), \quad j = r, \varphi, z \tag{1.1}$$

или смешанные граничные условия

$$\begin{aligned} u_j(r, \varphi, z = -h) &= u_j^-(r, \varphi), \quad j = r, \varphi, z, \\ u_z(r, \varphi, z = h) &= u_z^+(r, \varphi), \quad \sigma_{jz}(r, \varphi, z = h) = \sigma_{jz}^+(r, \varphi), \quad j = r, \varphi. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Условия на боковой поверхности пластины пока не конкретизируются, о них будет сказано позже. Влияние температурного поля учитывается по модели Дюгамеля - Неймана.

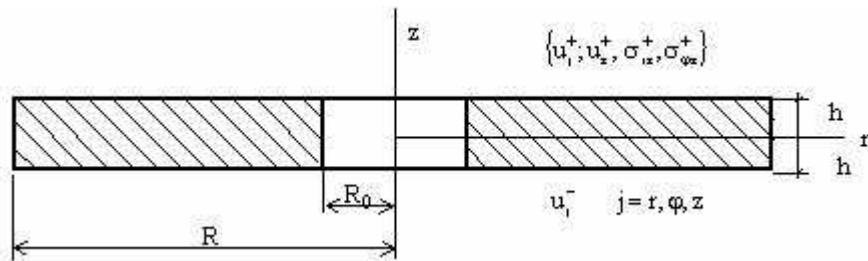


Рис. 1.

В уравнениях пространственной задачи термоупругости в цилиндрических координатах с учетом несжимаемости материала ( $\nu = 1/2, E = 3G$ ) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям по формулам [1-3]

$$\begin{aligned}\xi &= r/R, \quad \eta = \varphi, \quad \zeta = z/h = z\varepsilon^{-1}/R, \quad \varepsilon = h/R, \\ u &= u_r/R, \quad v = u_\varphi/R, \quad w = u_z/R.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\xi} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \zeta} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{\xi} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \zeta} + \frac{\sigma_{rz}}{\xi} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{3}{2G} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}) + \alpha\theta, \quad \frac{1}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{\xi} u &= \frac{3}{2G} [2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}] + \alpha\theta, \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{3}{2G} (2\sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) + \alpha\theta, \quad \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi} v &= \frac{1}{G} \sigma_{r\varphi}, \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{1}{G} \sigma_{rz}, \quad \frac{1}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{1}{G} \sigma_{\varphi z}, \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} u + \frac{1}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} &= 3\alpha\theta - \text{условие несжимаемости},\end{aligned}\tag{1.4}$$

где  $G$  - модуль сдвига несжимаемого материала,  $\theta$  - температурная функция.

Система уравнений (1.4) сингулярно возмущена малым параметром  $\varepsilon$ . Ее решение складывается из решения внутренней задачи, доминирующего внутри пластины, и решения типа пограничного слоя, локализованного вблизи боковой поверхности [4, 5]. Считая, что вклад температурного поля порядка вклада поверхностных воздействий, функцию  $\theta$ , выражающую изменение температуры пластины, представим в виде разложения

$$\theta = \varepsilon^{s-1} \theta^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad s = 0, S.\tag{1.5}$$

Решение внутренней задачи ищем в виде [1-5]

$$Q = \varepsilon^{K_Q+s} Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad s = 0, S,\tag{1.6}$$

где  $K_Q$  характеризует асимптотический порядок соответствующей искомой величины  $Q$ . Его значение обусловлено системой уравнений (1.4) и граничными условиями (1.1), (1.2).

Подставив (1.5), (1.6) в систему (1.4) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в левых и правых частях каждого уравнения, можно убедиться, что получение непротиворечивой системы уравнений относительно коэффициентов разложения (1.6) обеспечивается только при значениях

$$\begin{aligned}
K_{\sigma_{rr}} = K_{\sigma_{\varphi\varphi}} = K_{\sigma_{zz}} = -3, \quad K_w = 0, \\
K_{\sigma_{r\varphi}} = K_{\sigma_{rz}} = K_{\sigma_{\varphi z}} = -2, \quad K_u = K_v = -1.
\end{aligned}
\tag{1.7}$$

Решив полученную непротиворечивую систему, приходим к рекуррентным формулам относительно компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Возвратившись к размерным координатам и перемещениям, полученным расчетным формулам можно придать простой прикладной вид:

$$\begin{aligned}
Q &= Q^{(s)}(r, \varphi, z), \quad s = 0, S, \\
\sigma_{zz}^{(s)} &= \sigma_{zz0}^{(s)} + \sigma_{zz*}^{(s)} \quad (r, \varphi, z), \quad \sigma_{r0}^{(s)} = \sigma_{\varphi\varphi0}^{(s)} = \sigma_{zz0}^{(s)}, \\
\sigma_{rz}^{(s)} &= \sigma_{rz0}^{(s)} - z \frac{\partial \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial r} + \sigma_{rz*}^{(s)}, \quad \sigma_{\varphi z}^{(s)} = \sigma_{\varphi z0}^{(s)} - \frac{z}{r} \frac{\partial \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial \varphi} + \sigma_{\varphi z*}^{(s)}, \\
\sigma_{r\varphi}^{(s)} &= G \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(s-1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^{(s-1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\varphi^{(s-1)} \right), \\
u_r^{(s)} &= u_{r0}^{(s)} + \frac{1}{2G} \left( 2z \sigma_{rz0}^{(s)} - z^2 \frac{\partial \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial r} \right) + u_{r*}^{(s)}, \\
u_\varphi^{(s)} &= u_{\varphi0}^{(s)} + \frac{1}{2G} \left( 2z \sigma_{\varphi z0}^{(s)} - \frac{z^2}{r} \frac{\partial \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial \varphi} \right) + u_{\varphi*}^{(s)}, \\
u_z^{(s)} &= u_{z0}^{(s)} + u_{z*}^{(s)} - z \left( \frac{\partial u_{r0}^{(s)}}{\partial r} + \frac{1}{r} u_{r0}^{(s)} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\varphi0}^{(s)}}{\partial \varphi} \right) - \\
&\quad - \frac{z^2}{2G} \left( \frac{\partial \sigma_{rz0}^{(s)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz0}^{(s)} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z0}^{(s)}}{\partial \varphi} - \frac{z}{3} \frac{\partial^2 \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial r^2} - \frac{z}{3r} \frac{\partial \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial r} - \frac{z}{3r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial \varphi^2} \right), \\
\sigma_{zz*}^{(s)} &= - \int_0^z \left( \frac{\partial \sigma_{rz}^{(s-2)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}^{(s-2)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(s-2)} \right) dz, \\
\sigma_{rr*}^{(s)} &= \sigma_{zz*}^{(s)} + 4G \frac{\partial u_r^{(s-2)}}{\partial r} + \frac{2G}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi^{(s-2)}}{\partial \varphi} + u_r^{(s-2)} \right),
\end{aligned}
\tag{1.8}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi^*}^{(s)} = \sigma_{zz^*}^{(s)} + \frac{4G}{r} \left( \frac{\partial u_{\varphi}^{(s-2)}}{\partial \varphi} + u_{r}^{(s-2)} \right) + 2G \frac{\partial u_r^{(s-2)}}{\partial r},$$

$$\sigma_{rz^*}^{(s)} = - \int_0^z \left[ \frac{\partial \sigma_{rr}^{(s)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(s-1)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(s)} - \sigma_{\varphi\varphi^*}^{(s)}) \right] dz,$$

$$\sigma_{\varphi z^*}^{(s)} = - \int_0^z \left( \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(s-1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi^*}^{(s)}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}^{(s-1)}}{r} \right) dz,$$

$$u_{r^*}^{(s)} = \int_0^z \left( \frac{1}{G} \sigma_{rz^*}^{(s)} - \frac{\partial u_z^{(s-2)}}{\partial r} \right) dz, \quad u_{\varphi^*}^{(s)} = \int_0^z \left( \frac{1}{G} \sigma_{\varphi z^*}^{(s)} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(s-2)}}{\partial \varphi} \right) dz,$$

$$u_{z^*}^{(s)} = \int_0^z \left( 3\alpha\theta - \frac{\partial u_{r^*}^{(s)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\varphi^*}^{(s)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} u_{r^*}^{(s)} \right) dz,$$

где  $\sigma_{jz0}^{(s)}, u_{j0}^{(s)}, j = r, \varphi, z$ , неизвестные пока функции интегрирования, которые будут определены из условий на лицевых поверхностях  $z = \pm h$ .

Удовлетворив кинематическим граничным условиям (1.1), получим

$$\sigma_{jz0}^{(s)} = \frac{G}{2h} U_j^{(s)}, \quad j = r, \varphi,$$

$$U_j^{(s)} = u_j^{+(s)} - u_j^{-(s)} - u_{j^*}^{(s)}(z=h) + u_{j^*}^{(s)}(z=-h), \quad j = r, \varphi, z,$$

$$u_{r0}^{(s)} = \frac{h^2}{2G} \frac{\partial \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial r} + \frac{1}{2} \bar{U}_r^{(s)}, \quad u_{\varphi 0}^{(s)} = \frac{h^2}{2G} \frac{\partial \sigma_{zz0}^{(s)}}{r \partial \varphi} + \frac{1}{2} \bar{U}_{\varphi}^{(s)}, \quad (1.9)$$

$$\bar{U}_j^{(s)} = u_j^{+(s)} + u_j^{-(s)} - u_{j^*}^{(s)}(z=h) - u_{j^*}^{(s)}(z=-h), \quad j = r, \varphi, z,$$

$$u_{z0}^{(s)} = \frac{1}{2} \bar{U}_z^{(s)} + \frac{h}{4} \left( \frac{\partial}{\partial r} U_r^{(s)} + \frac{1}{r} U_r^{(s)} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} U_{\varphi}^{(s)} \right),$$

$$u_j^{\pm(0)} = u_j^{\pm}; \quad u_j^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad j = r, \varphi, z,$$

где  $\sigma_{zz0}^{(s)}$  решение уравнения

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{zz0}^{(s)} &= W^{(s)}, \\ W^{(s)} &= -\frac{3G}{2h^3} \left[ U_z^{(s)} + h \left( \frac{\partial}{\partial r} \bar{U}_r^{(s)} + \frac{1}{r} \bar{U}_r^{(s)} \right) + \frac{h}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \bar{U}_\varphi^{(s)} \right], \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \text{оператор Лапласа.} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Общее решение уравнения (1.10) не содержит необходимого количества произвольных функций интегрирования, чтобы поточечно удовлетворить граничным условиям на боковых поверхностях  $r = R_0$ ,  $r = R$  пластины. Это косвенно подтверждает сингулярную возмущенность исходной краевой задачи. Решением внутренней задачи условиям на боковых поверхностях можно удовлетворить интегрально. Если боковые поверхности свободны от нагрузок, то такими интегральными условиями будут

$$\sum_{s=0}^S \int_{-h}^h \sigma_{rr}^{(s)}(r = a, \varphi) dz = 0, \quad a = R_0, R. \quad (1.11)$$

Определив  $\sigma_{zz0}^{(s)}$  по формулам (1.8)-(1.11) можно определить остальные величины.

Когда на лицевых поверхностях заданы смешанные условия (1.2), функции интегрирования определяются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{rz0}^{(s)} &= \sigma_{rz}^{+(s)} + h \frac{\partial \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial r} - \sigma_{rz}^{(s)}(z = h), \quad \sigma_{\varphi z0}^{(s)} = \sigma_{\varphi z}^{+(s)} + \frac{h}{r} \frac{\partial \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial \varphi} - \sigma_{\varphi z}^{(s)}(z = h), \\ u_{r0}^{(s)} &= u_r^{-(s)} + \frac{h}{G} \sigma_{rz}^{+(s)} + \frac{3h^2}{2G} \frac{\partial \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial r} - u_{r^*}^{(s)}(z = -h), \\ u_{\varphi 0}^{(s)} &= u_\varphi^{-(s)} + \frac{h}{G} \sigma_{\varphi z}^{+(s)} + \frac{3h^2}{2Gr} \frac{\partial \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial \varphi} - u_{\varphi^*}^{(s)}(z = -h), \\ u_{z0}^{(s)} &= \frac{1}{2} \bar{U}_z^{(s)} + \frac{h^2}{2G} \left( \frac{\partial \sigma_{rz}^{+(s)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{+(s)} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}^{+(s)}}{\partial \varphi} \right) - \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$-\frac{h^2}{2G} \left( \frac{\partial \sigma_{rz}^{(s)}(z=h)}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(s)}(z=h) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}^{(s)}(z=h)}{\partial \varphi} \right) + \frac{h^3}{2G} \nabla^2 \sigma_{zz0}^{(s)},$$

$\sigma_{rz}^{(s)}(0) = \sigma_{rz}^{(s)}(h) = 0, \quad \sigma_{\varphi z}^{(s)}(0) = \sigma_{\varphi z}^{(s)}(h) = 0, \quad s \neq 0, \quad (r, \varphi).$

где  $\sigma_{zz0}^{(s)}$  решение уравнения

$$\nabla^2 \sigma_{zz0}^{(s)} = V^{(s)},$$

$$\begin{aligned} V^{(s)} = & -\frac{3G}{4h^2} \left( \frac{1}{2h} U_z^{(s)} - \frac{\partial(u_r^{-(s)} - u_{r^*}^{(s)}(z=-h))}{\partial r} + \right. \\ & \left. + \frac{u_r^{-(s)} - u_{r^*}^{(s)}(z=-h)}{r} + \frac{\partial(u_\varphi^{-(s)} - u_{\varphi^*}^{(s)}(z=-h))}{r \partial \varphi} \right) - \\ & - \frac{3}{4h} \left( \frac{\partial(\sigma_{rz}^{+(s)} - \sigma_{rz}^{(s)}(z=h))}{\partial r} + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_{rz}^{+(s)} - \sigma_{rz}^{(s)}(z=h)}{r} + \frac{\partial(\sigma_{\varphi z}^{+(s)} - \sigma_{\varphi z}^{(s)}(z=h))}{r \partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (1.13)$$

которое должно быть таким, чтобы удовлетворялись интегральные условия (1.11).

2. В качестве приложения выведенных формул приведем решения некоторых прикладных задач:

а) Лицевым поверхностям пластины сообщены постоянные нормальные и тангенциальные перемещения

$$u_j(r, \varphi, z = \pm h) = u_j^\pm = \text{const}, \quad j = r, \varphi, z. \quad (2.1)$$

Ограничившись первым шагом итерации, без учета влияния температурного поля, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} = \sigma, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \\ \sigma_{rz} = \frac{G}{2h} \left( u_r^+ - u_r^- \right) - z \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi z} = \frac{G}{2h} \left( u_\varphi^+ - u_\varphi^- \right) - \frac{z}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \\ u_r = \frac{(h+z)u_r^+ + (h-z)u_r^-}{2h} + \frac{h^2 - z^2}{2G} \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$u_z = \frac{1}{2} (u_z^+ + u_z^-) + \frac{z(3h^2 - z^2)}{4h^3} (u_z^+ - u_z^-) + \frac{h^2 - z^2}{4hr} \left[ u_r^+ - u_r^- + \frac{z}{h} (u_r^+ + u_r^-) \right],$$

где  $\sigma$  решение уравнения (1.10), удовлетворяющее условиям (1.11), которое имеет вид

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \left( A_k r^{\lambda_k} + B_k r^{-\lambda_k} + \frac{1}{\pi \lambda_k} W \right) \sin \lambda_k \varphi,$$

$$A_k = \frac{W(R_0)R^{-\lambda_k} - W(R)R_0^{-\lambda_k}}{R^{\lambda_k}R_0^{-\lambda_k} - R^{-\lambda_k}R_0^{\lambda_k}} \frac{1}{\pi \lambda_k}, \quad \lambda_k = \frac{2k+1}{4}, \quad (2.3)$$

$$B_k = \frac{W(R)R^{\lambda_k} - W(R_0)R_0^{\lambda_k}}{R^{\lambda_k}R_0^{-\lambda_k} - R^{-\lambda_k}R_0^{\lambda_k}} \frac{1}{\pi \lambda_k}, \quad W = -\frac{3Gr^2}{2h^3} \left( \frac{u_z^+ - u_z^-}{4} + \frac{h}{r} (u_r^+ + u_r^-) \right).$$

б) Одна лицевая поверхность кольцевой пластины жестко закреплена, а к противоположной поверхности приложена касательная нагрузка, пропорциональная  $\tau$

$$u_j(z = -h) = 0, \quad j = r, \varphi, z, \quad \sigma_{zz}(z = h) = \sigma_{rz}(z = h) = 0, \quad \sigma_{\varphi z}(z = h) = \tau r. \quad (2.4)$$

Задача моделирует кручение кольцевой пластины относительно оси симметрии (рис. 2).

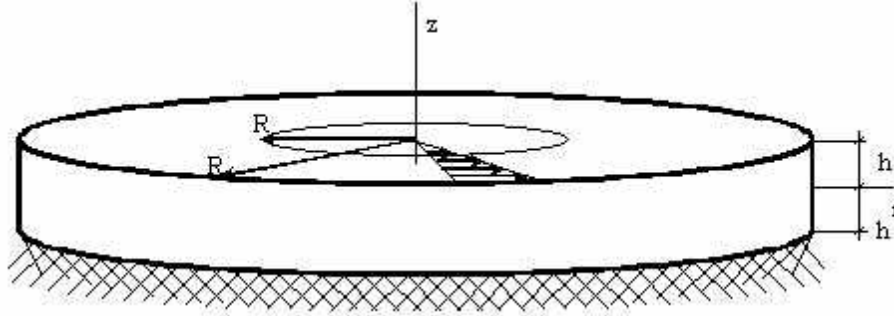


Рис. 2.

Интерация обрывается на исходном приближении и приводит к математически точному решению

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{\varphi z} = \tau r, \quad u_\varphi = \frac{z+h}{G} \tau r, \quad u_r = u_z = 0. \quad (2.5)$$

Заметим, что при граничных условиях (2.4) компоненты тензора напряжений не вызывают изменения объема кольцевой пластины независимо от значения коэффициента Пуассона  $\nu$ . Исходя из этого тождественно удовлетворяется не только условие несжимаемости, но и уравнение (1.10), которое является следствием полученной для тел из несжимаемых материалов асимптотики (1.7). Поэтому замкнутое решение (2.5) можно получить также из решений смешанных задач для тел из сжимаемых материалов.

в) На лицевой поверхности  $z = -h$  пластины заданы постоянные компоненты вектора перемещения, а на противоположной - смешанные условия

$$\begin{aligned}
u_j(z = -h) = u_j^- = \text{const}, \quad j = r, \varphi, z, \\
u_z(z = h) = u_z^+ = \text{const}, \quad \sigma_{zj}(z = h) = \sigma_{jz}^+ = \text{const}, \quad j = r, \varphi.
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

Для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, с точностью  $O(\varepsilon)$ , имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} = \sigma, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \\
\sigma_{rz} = \sigma_{rz}^+ + (h - z) \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi z} = \sigma_{\varphi z}^+ + \frac{h - z}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \\
u_r = u_r^- + \frac{z + h}{G} \sigma_{rz}^+ + \frac{(h + z)(3h - z)}{2G} \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \\
u_\varphi = u_\varphi^- + \frac{z + h}{G} \sigma_{\varphi z}^+ + \frac{(h + z)(3h - z)}{2Gr} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \\
u_z = \frac{u_z^+ + u_z^-}{2} + \frac{8zh^2 + (h^2 - z^2)(z - 3h)}{16h^3} (u_z^+ - u_z^-) + \\
+ \frac{(h^2 - z^2)(z - 3h)}{8h^2 r} u_r^- + \frac{(h^2 - z^2)(h + z)}{8Ghr} \sigma_{rz}^+,
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

где  $\sigma$  имеет вид (2.3) с той разницей, что  $W$  следует принимать

$$W = - \frac{3Gr^2}{4h^2} \left( \frac{u_z^+ - u_z^-}{8h} + \frac{u_r^-}{r} \right) - \frac{3r}{4h} \sigma_{rz}^+.
\tag{2.8}$$

Приведенные примеры моделируют, в частности, работу эластомерных сейсмоизоляторов [6]. Из выведенных рекуррентных формул и рассмотренных примеров следует, что в отличие от прямоугольных для круглых пластин интерационный процесс, как правило, не обрывается и не приводит к математически точному решению краевых задач, даже при постоянных внешних воздействиях. Однако выведенные рекуррентные формулы позволяют найти решение с заранее заданной асимптотической точностью. Тем же методом можно получить также решения более сложных задач, в частности, решения для слоистых круговых пластин с отверстием.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность академику Л. А. Агаловяну за советы.

Институт механики НАН Армении  
Армянская сельскохозяйственная академия



## Литература

1. *Агаловян Л. А., Геворкян Р. С.* В сб.: Тр. IV Всесоюзн. симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск. Наука, 1984. С. 105-110.
2. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука, 1997. 414 с.
3. *Агаловян Л. А., Геворкян Р. С., Саакян А. В.* - ДНАН Армении. 1997. Т. 97. № 3. С. 13-18.
4. *Агаловян Л. А.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1973. № 2. Т. 26. С. 27-43.
5. *Геворкян Р. С.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. № 6. Т. 37. С. 3-15.
6. *Kelly J. M.* - Report № UCB/EERC-94/03. March. 1994. 59 p.

Ռ. Ս. Գևորգյան, Ե. Գ. Վիրաբյան

## Անսեղմելի նյութից շրջանային օղակաձև սալի առաձգականության տեսության եզրային խնդիրների ասիմպտոտիկական լուծումները

Անսեղմելի գլանային մարմնի առաձգականության տեսության եռաչափ եզրային խնդրի հավասարումների ասիմպտոտիկական ինտեգրման միջոցով արտածված են ռեկուրենտ բանաձևեր շրջանային օղակաձև սալի լարումների տենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար, երբ սալի դիմային մակերևույթների վրա տրվում են կինեմատիկական կամ խառը եզրային պայմաններ: Ցույց են տրված կոորդինատական առանցքի ուղղությամբ փոփոխելիության և նյութի անսեղմելիության ազդեցություններն ասիմպտոտիկական պրոցեսի վրա: Բերված են արտածված բանաձևերի կիրառությունները լուսաբանող օրինակներ: