ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 89 1989 №3

УДК 514.752.43

МАТЕМАТИКА

Р. Ц. Мусаелян

О метриках, заданных в асимптотических координатах

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 12/VI 1989)

1. В настоящей работе будем рассматривать некоторые двумерные метрики, заданные в асимптотических координатах. Одна из рассматриваемых метрик допускает регулярное погружение в E^3, а другая—нет.

Рассмотрим метрику

$$ds^2=\lambda(x, y)(dx^2+dy^2), \tag{1}$$

заданную в области $\Pi_0=\{x^2+y^2\neq 0, -\infty<x, y<+\infty\}$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Для того, чтобы метрика (1) могла быть изометрически погружена в E^3 в виде регулярной поверхности, на которой линии x и y—асимптотические, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\Delta \ln\lambda(x, y)=\frac{c_1}{\lambda(x,y)}, \tag{2}$$

где $c_1=\text{const}>0$, а Δ—двумерный оператор Лапласа.

Будем рассматривать также метрику

$$ds^2=f^2(y)dx^2+g^2(x)dy^2,$$

заданную на всей плоскости xoy.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Метрика (3) не может быть изометрически погружена в E^3 в виде регулярной поверхности, на которой линии x и y образуют асимптотическую сеть.*

2. Задача погружения в E^3 метрики сводится к отысканию коэффициентов $L(x, y)$, $M(x, y)$, $N(x, y)$ второй квадратичной формы искомой поверхности, удовлетворяющих системе уравнений Петерсона—Кодацци и Гаусса (см. [2]). Запишем эту систему в случае, когда метрика задана в общем виде (т. е. когда $ds^2=E(x,y)dx^2+2F(x,y)dxdy+$ $+G(x.y)dy^2$):

$$l_y-m_x=-\Gamma^2_{22}l+2\Gamma^2_{12}m-\Gamma^2_{11}n;$$

$$n_x-m_y=-\Gamma^1_{22}l+2\Gamma^1_{12}m-\Gamma^1_{11}n;$$

$$ln-m^2=-k^2.$$

Здесь $l(x, y)$, $m(x, y)$, $n(x, y)$—приведенные коэффициенты второй квадратичной формы, связанные с коэффициентами $L(x,y)$, $M(x,y)$,

$N(x, y)$ соотношениями $L(x, y)=l \cdot W$, $M(x, y)=m \cdot W$, $N(x, y)= =n \cdot W$, где $W=\sqrt{EG-F^2}$. Отметим, что $-k^2$—кривизна рассматриваемой метрики, а коэффициенты Γ^{α}_{ij} $(i, j, \alpha=1, 2)$ (символы Кристофеля) правой части системы (4) в заданной метрике являются определенными функциями (см. ([2])).

3. Доказательство теорем. Доказательство теоремы 1. Известно (см. ([2])), что если координатные линии x и y являются асимптотическими, то коэффициенты второй квадратичной формы $L(x, y)= =N(x, y)=0$. Тогда система (4) для линейного элемента (1) примет вид:

$$
\begin{aligned}
&M_x(x, y)=M_y(x, y)=0;\\
&M(x, y)=k(x, y) \cdot \lambda(x, y).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Из первого равенства системы (5) получим $M(x, y)=\mathrm{const}=c$. Из второго уравнения системы (5) следует, что

$$k^2(x, y) \cdot \lambda^2(x, y)=c^2. \tag{6}$$

Гауссова кривизна $K(x, y)$ метрики (2) вычисляется по формуле $K=-\frac{1}{2\lambda}\Delta \ln\lambda$, где Δ—двумерный оператор Лапласа. Учитывая последнее, из уравнения (6) нетрудно получить условие (2) теоремы 1.

Доказательство обратного утверждения теоремы 1 очевидно. Отметим только, что уравнение (2) имеет решение в некоторой области.

В работе ([1]) доказано, что нелинейное эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$\Delta U(x, y)+ae^{U(x,y)}=0,$$

где $a=\mathrm{const}>0$, имеет решение, определенное в области $\Pi_0= =\{x^2+y^2\neq 0, -\infty<x, y<\infty\}$. В этой работе приведена конкретная функция, удовлетворяющая уравнению (7). Подстановка $\ln\lambda(x, y)= =-v(x, y)$ приводит уравнение (2) к форме

$$\Delta v(x, y)+c_1e^{v(x,y)}=0.$$

Следовательно, уравнение (2) в области Π_0 имеет решение.

Замечание. Любая постоянная удовлетворяет системе (5), однако нашей задаче удовлетворяет только $c\neq 0$, так как асимптотическая сеть существует только на многообразиях отрицательной гауссовой кривизны.

Доказательство теоремы 2. Доказательство приведем методом от противного. Пусть метрика (3) регулярно и изометрически погружается в E^3. Это означает, что система (4) для метрики (3) допускает регулярное решение. Запишем эту систему:

$$
\begin{aligned}
&M_x(x, y)=-\frac{g'(x)}{g(x)}M(x, y);\\
&M_y(x, y)=-\frac{f'(y)}{f(y)}M(x, y);\\
&M(x, y)=\varkappa(x, y) \cdot f(y) \cdot g(x).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Здесь $\varkappa(x, y)=\sqrt{-K(x, y)}$, а $K(x, y)$ — кривизна метрики (3). Система (8) сводится к следующей системе относительно функции $\varkappa(x, y)$:

$$\varkappa_x(x, y)=-\frac{2g'(x)}{g(x)}\varkappa(x, y); \quad \varkappa_y(x, y)=-\frac{2f'(y)}{f(y)}\varkappa(x, y).$$

Последняя система имеет решение

$$\varkappa(x, y)=\frac{c_2}{g^2(x)f^2(y)}, \tag{9}$$

где $c_2=\text{const}>0$. С учетом кривизны метрики (3) соотношение (9) превращается в дифференциальное уравнение

$$f^3(y)\cdot f''(y)+f^2(y)\cdot g(x)\cdot g''(x)-\frac{c_2}{g^2(x)}=0. \tag{10}$$

Уравнение (10) является нелинейным дифференциальным уравнением относительно, например, функции $f(y)$ (переменную x можно рассматривать в качестве параметра). Подстановка $f^2(y)=\varphi(y)$ приводит уравнение (10) к соотношению

$$\varphi(y)\cdot\varphi''(y)-\frac{1}{2}\varphi'^2(y)+2G_1(x)\varphi(y)+2G_2(x)=0, \tag{11}$$

где $G_1(x)=g(x)\cdot g''(x)$, $G_2(x)=-\frac{c_2}{g^2(x)}$.

Используем теперь подстановку $\varphi'(y)=\sqrt{\Omega(\varphi)}$ применительно к уравнению (11):

$$\varphi\frac{d\Omega(\varphi)}{d\varphi}=\Omega(\varphi)-4G_1(x)\cdot\varphi-4G_2(x). \tag{12}$$

Уравнение (12) является линейным, и его решение можно определить в общем случае. Если теперь провести обратные рассуждения, учитывая подстановки, то нетрудно прийти к выводу, что функции $f(y)$ и $g(x)$, а следовательно, y и x находятся в функциональной зависимости. Этот факт противоречит тому, что x и y независимые переменные.

Таким образом, в пространстве E^3 не может быть погружена метрика (3), для которой координатные линии x и y являлись бы асимптотическими.

Армянский государственный педагогический институт
им. Х. Абовяна

Ռ. Մ. ՄՈՒՍԱՅԵԼՅԱՆ

Ասիմպտոտիկական կոորդինատներով տրված չափերի մասին

Այս աշխատանքում դիտարկվում են հետևյալ չափերը.

$$ds^2=\lambda(x, y)(dx^2+dy^2) \text{ և } ds^2=f^2(y)dx^2+g^2(x)dy^2.$$

Ապացուցվում է, որ որոշ անհրաժեշտ և բավարար պայմանի դեպքում, առաջին չափը տրված $\Pi_0=\{x^2+y^2\neq 0,\ -\infty<x,\ y<+\infty\}$ տիրույթում, թույլատրում է իզոմետրիկ ընկղմելիություն էվկլիդյան եռաչափ տարածություն E^3, ռեգուլյար մակերևույթի տեսքով, որի վրա x և y գծերը ասիմպտոտական են: Երկրորդ չափը, տրված ամբողջ հարթության վրա, չի թույլատրում իզոմետրիկ ընկղմելիություն E^3 ռեգուլյար մակերևույթի տեսքով, որի վրա x և y գծեր լինեն ասիմպտոտական: Ուրիշ խոսքով, E^3-ում գոյություն չունի ռեգուլյար մակերևույթ, որի վրա x և y գծերը լինեն ասիմպտոտական և որը որպես մակերևույթի առաջին քառակուսային ձև ունենա երկրորդ չափը:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. Каметака, О. А. Олейник*, Мат. сб., т. 107 (149), № 4 (12) (1978). [2] *А. В. Погорелов*, Дифференциальная геометрия, М., 1974.