

УДК 519.7

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

К. В. Задоян

Полная булева функция

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ю. Г. Шукурзяном 11/VI 1990)

В работе рассматривается задача построения дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) для булевой функции f , заданной перечислением нулевых наборов $\bar{\alpha}_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n)$, $i = \overline{1, k}$, или совершенной конъюнктивной нормальной формой (КНФ):

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^k (\bar{x}_1^{\alpha_i^1} \vee \dots \vee x_n^{\alpha_i^n}).$$

При этом требуется построить либо кратчайшую ДНФ, реализующую функцию f , либо ДНФ, достаточно близкую к кратчайшей по сложности. Такая задача возникает, в частности, в алгоритмах распознавания комбинаторно-логического характера, основанных на переборе конъюнкций или выделении представительных наборов, если описания объектов заданы бинарными признаками, а также в различных алгоритмах минимизации булевых функций. Прямое перемножение скобок совершенной КНФ с применением системы упрощающих тождеств булевой алгебры практически невыполнимо даже при сравнительно небольшом числе нулевых наборов.

В настоящей статье в качестве отправной точки используется подход, изложенный в работе (1).

Множество булевых функций, зависящих от n переменных и имеющих ровно k нулевых наборов, обозначается через $P_2^k(n)$. Функция $f \in P_2^k(n)$ задается матрицей нулей $M_f = \|\alpha_i^j\|_{k \times n}$, строки которой — нулевые наборы f . Без ограничения общности можно рассматривать лишь так называемые приведенные матрицы нулей, в которых нет нулевых и единичных столбцов, нет противоположных столбцов, а все одинаковые столбцы расположены последовательно. Данное предположение основывается на следующих двух предпосылках:

1. Переменные, соответствующие нулевым и единичным столбцам матрицы нулей, могут быть вынесены в совершенной КНФ из-под знака произведения. Такие переменные в соответствующих степенях суть конъюнкции ранга 1, ядровые для f . Они, следовательно, входят во все тупиковые ДНФ функции f .

2. Преобразования $x_i \rightarrow x_{j(i)}^{\sigma_i}$, $i \rightarrow j(i)$ — подстановка, $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$ оставляют инвариантными все свойства ДНФ, связанные с задачами минимизации.

Совокупности одинаковых столбцов матрицы нулей M_f нумеруются последовательно, а переменные, соответствующие столбцам q -й совокупности, обозначаются через x_{qj} ,

$$j = \overline{1, n_q}, \sum_{q=1}^l n_q = n, \lceil \log_2 k \rceil \leq l \leq 2^{k-1} - 1.$$

Функции $f \in P_2^k(n)$ сопоставляется функция $\varphi \in P_2^k(l)$, зависящая от переменных z_1, \dots, z_l , матрица нулей которой состоит из всех различных столбцов матрицы M_f так, что столбец, соответствующий переменной z_q , совпадает со столбцами, соответствующими переменным x_{qj} . Данное сопоставление позволяет свести построение коротких ДНФ функции f к построению коротких ДНФ функции φ . Пусть $S_\varphi(Q_f) = S_\varphi \cap Q_f$, где S_φ — множество номеров всех столбцов, входящих во все тупиковые тесты матрицы M_φ , Q_f — множество номеров совокупностей одинаковых столбцов матрицы M_f , содержащих более одного столбца. Пусть, далее, $D(\varphi)$ — произвольная ДНФ, реализующая функцию φ , $D_x(\varphi)$ — ДНФ, полученная из $D(\varphi)$ преобразованием переменных:

$$\{z_q \rightarrow x_{qj(z_q)} : j(z_q) = \text{sgn}(1 - z_q) + z_q \cdot n_q\}.$$

Тогда ДНФ

$$D(f) = D_1(f) \vee D_2(f) \vee D_x(\varphi)$$

реализует функцию f , где

$$D_1(f) = \bigvee_{q \in S_\varphi(Q_f)} x_{qn_q} \cdot \overline{x_{q1}}, \quad D_2(f) = \bigvee_{q=1}^l \bigvee_{j=1}^{n_q-1} x_{qj} \cdot \overline{x_{q(j+1)}},$$

причем если $D(\varphi)$ — тупиковая ДНФ функции φ , то $D(f)$ — тупиковая ДНФ функции f . Следовательно,

$$|D_{\text{кр}}(f)| \leq n - l + |S_\varphi(Q_f)| + |D_{\text{кр}}(\varphi)|,$$

$$L(D_{\text{мин}}(f)) \leq 2((1 - \alpha(f)/2)n - l + |S_\varphi(Q_f)|) + L(D_{\text{мин}}(\varphi)),$$

где $\alpha(f) \in [0, 1]$ — доля нулевых и единичных столбцов в матрице нулей M_f .

В работе (2) разработан редуцирующий алгоритм построения коротких ДНФ булевых функций с малым числом нулей, при помощи которого для произвольной функции $f \in P_2^k(n)$, $k \geq 2$, получены следующие оценки:

$$|D_{\text{кр}}(f)| \leq n + m(k), \quad m(2) = 0, \quad m(3) = 1, \quad m(4) = 3,$$

$$m(k) = 2^{k-1} - 3 + m(\lfloor k/2 \rfloor) + m(\lceil k/2 \rceil), \quad k \geq 5;$$

$$L(D_{\text{мин}}(f)) \leq 2n + p(k), \quad p(2) = 0, \quad p(3) = 3, \quad p(4) = 9,$$

$$p(k) = 2^{k+1} - 10 + p(\lfloor k/2 \rfloor) + p(\lceil k/2 \rceil) + m(\lfloor k/2 \rfloor) + m(\lceil k/2 \rceil), \quad k \geq 5.$$

В работе (2) установлено также, что при малом числе нулей ($k \leq \log_2 n - \log_2 \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$) почти все булевы функции устроены одинаково в том смысле, что им сопоставляется одна и та же функция, называемая полной.

Определение (2). Функция $\varphi \in P_2^k(l)$ называется полной, ес-

ли $l=2^{k-1}-1$, т. е. матрица нулей M_{φ} состоит из максимально возможного числа столбцов.

Таким образом, полная функция играет важную роль в задаче минимизации булевых функций с малым числом нулей. Полную функцию с k нулями будем обозначать через $\varphi_k(z_1, \dots, z_{2^{k-1}-1})$, $k \geq 2$, считая при этом, что столбцы матрицы нулей M_{φ_k} являются двоичными разложениями чисел $1, \dots, 2^{k-1}-1$ и расположены в (лексикографическом) порядке возрастания. Полная функция с двумя нулями тождественно равна нулю.

Теорема 1. Расстояние Хэмминга между произвольными двумя нулями полной функции φ_k равно 2^{k-2} .

Следствие 1. Все нули полной функции φ_k , кроме 0, расположены в 2^{k-2} -м (верхнем среднем) слое $(2^{k-1}-1)$ -мерного единичного куба.

Следствие 2. При $k > 3$ $D_{\text{ядро}}(\varphi_k) = \emptyset$ (все простые импликанты полной функции φ_k являются ядровыми).

Следствие 3. При $k > 2$ $S_{\varphi_k} = \emptyset$ ($S_{\varphi_2} = \{1\}$).

Для произвольного $K \in D_c(\varphi_k)$, $k > 2$, имеет место: $2 \leq \text{rang}(K) \leq k$, причем существует единственный простой импликант полной функции φ_k максимального ранга.

Теорема 2. Если $k_1 < k_2$, то $D_c(\varphi_{k_1}) \supseteq D_c(\varphi_{k_2})$.

Простейшие реализации полной функции φ_k известны лишь при $k = 2, 3, 4$ (2).

Теорема 3. Для длины кратчайшей ДНФ полной функции φ_k , $k > 3$, имеет место следующая нижняя оценка:

$$|D_{\text{кр}}(\varphi_k)| \geq 2^{k-1} + k - 2.$$

Следствие. Для буквенной сложности минимальной ДНФ полной функции φ_k , $k > 3$ имеет место следующая нижняя оценка:

$$L(D_{\text{мин}}(\varphi_k)) \geq 2^k + 2k - 4.$$

Теорема 4. Полную функцию φ_k можно реализовать тупиковой ДНФ, состоящей из простых импликантов, ранг которых не больше трех, и имеющей длину $2^{k-1} - 1 + a(k)$, где

$$a(k) = C_{k-1}^{1+(k-1)/2} + k - 4.$$

Следствие 1. Полную функцию φ_k можно реализовать тупиковой ДНФ, состоящей из простых импликантов, ранг которых не больше трех, и имеющей буквенную сложность $2^k - 2 + b(k)$, где

$$b(k) = 2^{k-1} - 1 + 3(C_{k-1}^{1+(k-1)/2} - 2).$$

Следствие 2. Любую функцию $f \in P_{\frac{k}{2}}^k(n)$, которой сопоставляется полная функция φ_k , можно реализовать тупиковой ДНФ, состоящей из простых импликантов, ранг которых не больше трех, и имеющей длину и буквенную сложность, соответственно, $n + a'(k)$ и $2(1 - \alpha(f)/2)n + b'(k)$, где

$$a'(2) = |S_{\varphi_2}(Q_f)| + a(2), \quad a'(k) = a(k), \quad k \geq 3;$$

$$b'(2) = 2|S_{\varphi_2}(Q_f)| + b(2), \quad b'(k) = b(k), \quad k \geq 3.$$

Таким образом, для длины кратчайшей и буквенной сложности минимальной ДНФ полной функции φ_k имеют место следующие асимптотические оценки:

$$|D_{\text{кр}}(\varphi_k)| = (2^{k-1} - 1)(1 + o(1)),$$

$$(2^k - 2)(1 + o(1)) \leq L(D_{\text{мин}}(\varphi_k)) \leq 1.5(2^k - 2)(1 + o(1)).$$

Между функциями $m(k)$ и $a(k)$, $p(k)$ и $b(k)$ имеют место следующие асимптотические соотношения:

$$m(k) = \sqrt{\frac{\pi(k-1)}{2}} a(k)(1 + o(1)),$$

$$p(k) = 4^k(k)(1 + o(1)).$$

Приведем значения функций $m(k)$, $a(k)$, $p(k)$, $b(k)$ при $k = \overline{2, 10}$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$m(k)$	0	1	3	14	31	65	131	270	537
$a(k)$	-1	1	3	7	12	23	39	75	132
$p(k)$	0	3	9	58	126	262	526	1098	2182
$b(k)$	-2	3	10	27	55	117	226	459	883

Автор выражает благодарность Ю. И. Журавлеву за постановку задачи и поддержку при ее решении.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Կ. Վ. ԶԱԿՈՅԱՆ

Լրիվ բուլյան ֆունկցիա

Աշխատանքում դիտարկվում է քիչ թվով դրոճեր ունեցող բուլյան ֆունկցիաների մինիմիզացիայի խնդիրը դիզուենկտիվ նորմալ ձևերի դասում: Հայտնի է, որ այդպիսի ֆունկցիաների մինիմիզացիան $k \leq \log_2 n - \log_2 \ln n + 1$ պարմանի դեպքում, որտեղ k -ն դրոճերի քանակն է, n -ը՝ փոփոխականների համարյա միշտ հանգեցվում է լրիվ բուլյան ֆունկցիայի մինիմիզացմանը: Յույց է տրված, որ

$$2^{k-1} + k - 2 \leq |D_{\text{кр}}(\varphi_k)| \leq 2^{k-1} + C_{k-1}^{L(k-1)/2} + k - 5, \quad k > 3,$$

որտեղ $|D_{\text{кр}}(\varphi_k)|$ -ն k հաս դրոճեր ունեցող լրիվ բուլյան ֆունկցիայի կարճագույն դիզուենկտիվ նորմալ ձևի երկարությունն է:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Ю. И. Журавлев, А. Ю. Коган, ДАН СССР, т. 285, № 4, с. 795—799 (1985).
- ² А. Ю. Коган, Методы минимизации бинарных функций с малым числом нулей, канд. дис., М., ВЦ АН СССР, 1987.